TMA4130

Numerisk løsninger av lineær systemer.

Eduard Ortega
Department of Mathematical sciences, NTNU

uke 44

Antall beregninger Gauss-eliminasjon

Antall beregninger Gauss-eliminasjon metode for en linear system av n ligninger og n ukjenter:

— Gausseliminerting algoritme

$$\frac{1}{2}(n-1)n + \frac{2}{3}(n^2-1)n \approx \frac{2}{3}n^3$$

— finne løsning av en triangulær system (Bakoversubstitusjon)

$$n^2$$

LU-faktorisering

Vi vil finne to matriser L og U slik at

$$\mathrm{A} = \mathrm{L} \cdot \mathrm{U}\,,$$

hvor

$$\mathrm{L} = \begin{pmatrix} m_{1,1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ m_{2,1} & m_{2,2} & 0 & \cdots & 0 \\ m_{3,1} & m_{3,2} & m_{3,3} & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ m_{n,1} & m_{n,2} & m_{3,n} & \cdots & m_{n,n} \end{pmatrix} \qquad \text{nedretriangulær}$$

$$\mathrm{U} = \begin{pmatrix} u_{1,1} & u_{1,2} & u_{1,3} & \cdots & u_{1,n} \\ 0 & u_{2,2} & u_{2,3} & \cdots & u_{2,n} \\ 0 & 0 & u_{3,3} & \cdots & u_{3,n} \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & u_{n,n} \end{pmatrix} \qquad \text{øvretriangulær}$$

$$\mathsf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$$

$$\Downarrow$$

$$\mathsf{L} \cdot \mathsf{U} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} \mathsf{U} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{y} \\ \mathsf{L} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{b} \end{cases}$$

Da

1. løse $L \cdot \mathbf{y} = \mathbf{b}$ med foroversubstitusjon,
2. løse $\mathsf{U} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{y}$ med Bakoversubstitusjon.

Doolittles metode

$$
L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ m_{2,1} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ m_{3,1} & m_{3,2} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ m_{n,1} & m_{n,2} & m_{3,n} & \cdots & 1 \end{pmatrix}
$$

Da

$$
u_{1,k} = a_{1,k} \qquad \text{for } k = 1, \ldots, n
$$

$$
m_{j,1} = \frac{a_{j,1}}{u_{1,1}} \qquad \text{for } j = 1, \ldots, n
$$

$$
u_{j,k} = a_{j,k} - \sum_{i=1}^{j-1} m_{j,i} u_{i,k} \qquad \text{for } k = j, \ldots, n \text{ og } j \geq 2
$$

$$
m_{j,k} = \frac{1}{u_{k,k}} \left(a_{j,k} - \sum_{i=1}^{k-1} m_{j,i} u_{i,k} \right) \qquad \text{for } j = k+1, \ldots, n \text{ og } k \geq 2
$$

Eksempel

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ m_{2,1} & 1 & 0 \\ m_{3,1} & m_{3,2} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_{1,1} & u_{1,2} & u_{1,3} \\ 0 & u_{2,2} & u_{2,3} \\ 0 & 0 & u_{3,3} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} u_{1,1} & u_{1,2} & u_{1,3} \\ m_{2,1}u_{1,1} & m_{2,1}u_{1,2} + u_{2,2} & m_{2,1}u_{1,3} + u_{2,3} \\ m_{3,1}u_{1,1} & m_{3,1}u_{1,2} + m_{3,2}u_{2,2} & m_{3,1}u_{1,3} + m_{3,2}u_{2,3} + u_{3,3} \end{pmatrix}$$

Fordeler og ulemper

- faktoriseringene er unik.
- Noen matriser kan ikke LU-faktoriseres. Da må vi bytte rader i matrisene.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- Den åpenbare fordelen med å gjøre Gausseliminasjon på denne formen er at vi kan kalkulere L og U en gang, dor så å løse systemet for mange forskjellige **b**.
- Antall beregninger $\approx \frac{n^3}{3}$

Choleskys metode

La A være en symmetrisk og positiv definitt matrise, dvs

— $\mathbf{x}^T \cdot A \cdot \mathbf{x} > 0$ for $\mathbf{x} \neq 0$,

— A er symmetrisk, dvs $A = A^T$

Da vi kan velge $U = L^T$, dvs

$$A = L \cdot L^T$$

Eksempel

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{1,2} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{1,3} & a_{2,3} & a_{3,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{1,1} & 0 & 0 \\ m_{2,1} & m_{2,2} & 0 \\ m_{3,1} & m_{3,2} & m_{3,3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} m_{1,1} & m_{2,1} & m_{3,1} \\ 0 & m_{2,2} & m_{3,2} \\ 0 & 0 & m_{3,3} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} m_{1,1}^2 & m_{1,1}m_{2,1} & m_{1,1}m_{3,1} \\ m_{2,1}m_{1,1} & m_{2,1}^2 + m_{2,2}^2 & m_{2,1}m_{3,1} + m_{2,2}m_{3,2} \\ m_{3,1}m_{1,1} & m_{3,1}m_{2,1} + m_{3,2}m_{2,2} & m_{3,1}^2 + m_{3,2}^2 + m_{3,3}^2 \end{pmatrix}$$

Choleskys metode

$$m_{1,1} = \sqrt{a_{1,1}}$$

$$m_{j,1} = \frac{a_{j,1}}{m_{1,1}} \qquad \text{for } j = 2, \ldots, m$$

$$m_{j,j} = \sqrt{a_{j,j} - \sum_{i=1}^{j-1} m_{j,i}^2} \qquad \text{for } j = 2, \ldots, n$$

$$m_{j,k} = \frac{1}{m_{k,k}} \left(a_{j,k} - \sum_{i=1}^{k-1} m_{k,i} m_{j,i} \right) \qquad \text{for } j = k+1, \ldots, n \text{ og } k \geq 2$$

Setning

Choleskysfaktorisering er numerisk stabil, dvs feil med avrunding vokser ikke stor.

Iterative ligningsløsere

Vi vil faktorisere

$$A = I + L + U\,,$$

hvor

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{2,1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{3,1} & a_{3,2} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{3,n} & \cdots & 0 \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} 0 & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,n} \\ 0 & 0 & a_{2,3} & \cdots & a_{2,n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{3,n} \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Gauss-Seidel iterasjon

$$\mathrm{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$$

$$\Downarrow$$

$$(\mathrm{I} + \mathrm{L} + \mathrm{U}) \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$$

$$\Downarrow$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{b} - \mathrm{L} \cdot \mathbf{x} - \mathrm{U} \cdot \mathbf{x}$$

Da Gauss-Seidel iterasjon er definert

$$\boxed{\mathbf{x}^{(n+1)} = \mathbf{b} - \mathrm{L} \cdot \mathbf{x}^{(n+1)} - \mathrm{U} \cdot \mathbf{x}^{(n)}}$$

Jacobi iterasjon

$$\mathsf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$$

$$\Downarrow$$

$$(\mathsf{A} - \mathsf{I} + \mathsf{I}) \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$$

$$\Downarrow$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{b} - (\mathsf{A} - \mathsf{I}) \cdot \mathbf{x}$$

Da Jacobi iterasjon er definert

$$\boxed{\mathbf{x}^{(n+1)} = \mathbf{b} - (\mathsf{A} - \mathsf{I}) \cdot \mathbf{x}^{(n)}}$$

Konvergens

Gauss-Seidel iterasjon konvergerer når enten

— A er symmetrisk og positiv definitt, eller

— A er diagonalt dominerende, eller
dvs $|a_{i,i}| > \sum_{j \neq i} |a_{i,j}|$ for alle i

— matrisnormen $\|C\| < 1$, hvor $C = (I + L)^{-1} \cdot U$

Matrisnormen er definert enten

— $\|A\| = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}^2}$, eller

— $\|A\| = \max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|$, eller

— $\|A\| = \max_j \sum_{i=1}^{n} |a_{i,j}|$.

konvergens

Jacobi iterasjon konvergerer når enten

- absoluttverdien til egenverdiene til matrise $(A - I)$ er mindre enn 1,
- A er diagonalt dominerende.