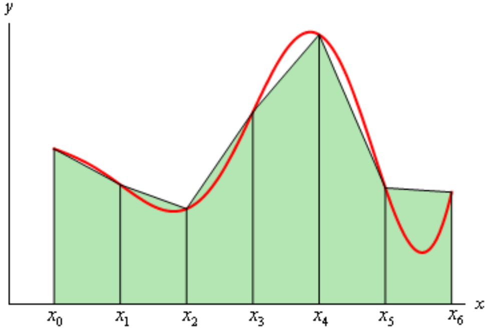
NTNU
Kunnskap for en bedre verden

TMA4130

Numerisk integrasjon og Gauss-eliminasjon.

Eduard Ortega
Department of Mathematical sciences, NTNU
uke 43

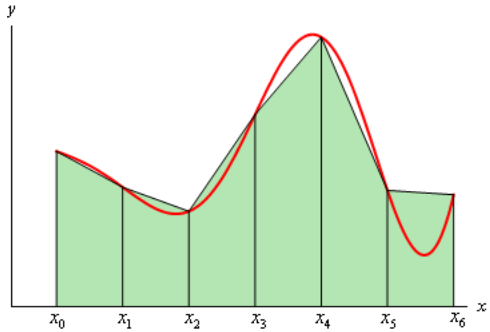
Trapesmetoden metode



Trapesmetoden går ut til å tilnærme integralet

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

Trapesmetoden metode



Trapesmetoden går ut til å tilnærme integralet

$$\int_a^b f(x)\,,dx$$

med n trapeser

Trapesmetoden metode

La

$$\boxed{h = \frac{b-a}{n}}$$

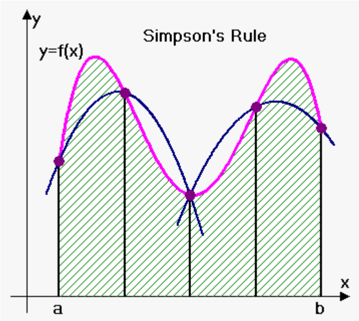
og

$$\boxed{x_0 = a} \qquad \boxed{x_1 = a + h} \qquad \boxed{x_i = a + i \cdot h} \qquad \boxed{x_n = b}$$

Den tilnærmede verdien til integralet er

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx T_n := \frac{h}{2}\left(f(x_0) + 2f(x_1) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)\right)$$

Simpsons metode



Simpsons metode går ut til å tilnærme $f(x)$ med $\frac{n}{2}$ parabler for å tilnærme integralet

$$\int_a^b f(x)\,dx\,.$$

Simpsons metode

La

$$h = \frac{b-a}{n}$$

med n et par tall, og

$x_0 = a$ $\quad$ $x_1 = a + h$ $\quad$ $x_i = a + i \cdot h$ $\quad$ $x_n = b$

Den tilnærmede verdien til integralet er

$$S_n := \frac{h}{3}\left(f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) \cdots + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)\right)$$

Feilestimater

$$\int_a^b f(x)\,, dx\,.$$

Trapesmetoden:

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx - T_n\right| \le \frac{(b-a)^3}{12n^2}\cdot M_2$$

der $M_2 = \max_{a\le x\le b}|f''(x)|$

Simpsons metode: (n partall)

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx - S_n\right| \le \frac{(b-a)^5}{180n^4}\cdot M_4$$

der $M_4 = \max_{a\le x\le b}|f^{(4)}(x)|$

Lineær systemer

Lineær system med n ligninger og n variabler:

$$L : \begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n = b_1 & \leftrightsquigarrow \quad L_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n = b_2 & \leftrightsquigarrow \quad L_2 \\ \cdots & \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,n}x_n = b_n & \leftrightsquigarrow \quad L_n \end{cases}$$

Da definerer matriser

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \qquad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Da lineær systemet L kan skrives på en vektoriell formen

$$A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}\,.$$

Wi definerer den utvidede matrisen

$$\widehat{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} & b_2 \\ \vdots & & & \vdots & \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} & b_n \end{array} \right)$$

$\widehat{A}$ er triangulær hvis er på formen

$$\widehat{A} = \left(\begin{array}{ccccc|c} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,n} & b_1 \\ 0 & a_{2,2} & a_{2,3} & \cdots & a_{2,n} & b_2 \\ 0 & 0 & a_{3,3} & \cdots & a_{3,n} & b_3 \\ \vdots & & & & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n,n} & b_n \end{array} \right)$$

Dersom $\widehat{A}$ er triangulær da

$$x_n = \frac{b_n}{a_n}$$

$$x_{n-1} = \frac{b_{n-1} - a_{n-1,n}x_n}{a_{n-1,n-1}}$$

$$x_{n-2} = \frac{b_{n-2} - a_{n-2,n}x_n - a_{n-2,n-1}x_{n-1}}{a_{n-2,n-2}}$$

$$\vdots$$

$$x_1 = \frac{b_1 - a_{1,n}x_n - a_{1,n-1}x_{n-1} \cdots - a_{1,2}x_2}{a_{1,1}}$$