TMA4130

Newtons metode og interpoasjon.

Eduard Ortega
Department of Mathematical sciences, NTNU
uke 42

Newtons metode

La $f(x)$ være en deriverbar funksjon, da a kalles en nullpunkt til $f(x)$ hvis $f(a) = 0$.

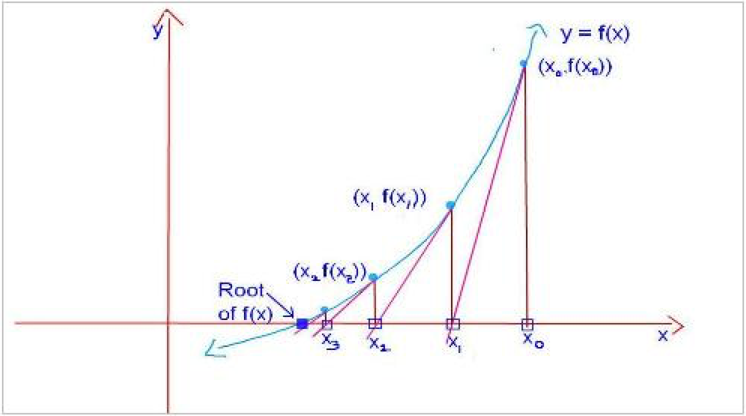
Newtons metode: la

$$\boxed{g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}}$$

da en fikspunkt til $g(x)$ er en nullpunkt til $f(x)$.

Så vi bruker fikspunktiterasjon

$\boxed{x_0}$ $\boxed{x_1 = g(x_0)}$ $\boxed{x_2 = g(x_1)}$ $\boxed{x_{n+1} = g(x_n)}$


y
y = f(x)
(x0,f(x0))
(x1 f(x1))
(x2,f(x2))
Root
of f(x)
x3
x2
x1
x0
x

Hastigheten av konvergens (Order av metoden)

La $g(x)$ være en funksjon, og la a være en fikspunkt til $g(x)$. La

$$g(x) = g(a) + g'(a)(x-a) + \frac{g''(a)}{2}(x-a)^2 + \frac{g'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots$$

være Taylorrekka til $g(x)$.

Husk $g(a) = a$, da

$$x_{n+1} = g(x_n) = a + g'(a)(x_n - a) + \frac{g''(a)}{2}(x_n - a)^2 + \frac{g'''(a)}{3!}(x_n - a)^3 + \cdots$$

og

$$x_{n+1} - a = g'(a)(x_n - a) + \frac{g''(a)}{2}(x_n - a)^2 + \frac{g'''(a)}{3!}(x_n - a)^3 + \cdots$$

Hastigheten av konvergens

$$x_{n+1} - a = g'(a)(x_n - a) + \frac{g''(a)}{2}(x_n - a)^2 + \frac{g'''(a)}{3!}(x_n - a)^3 + \cdots$$

Vi definerer feil

$$\boxed{\epsilon_n = x_n - a}$$

Da

$$\epsilon_{n+1} = g'(a)\epsilon_n + \frac{g''(a)}{2}\epsilon_n^2 + \frac{g'''(a)}{3!}\epsilon_n^3 + \cdots$$

Hastigheten av konvergens til fikspunkts metode $g(x) = x$ er det minste tallet k slik at $g^{(k)}(a) \neq 0$.

Orden av Newtons metode

Newtons metoden er en 2 ordens metode.

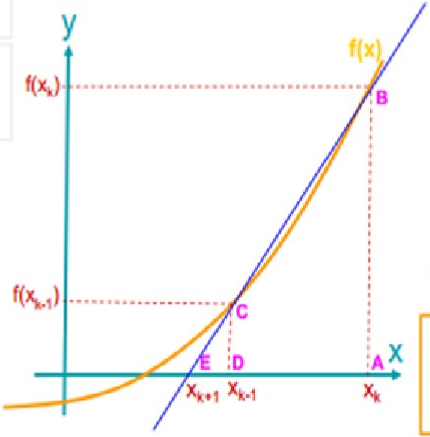
Sekant metode

<u>Sekant metode</u>: la

$\boxed{x_0}$ $\boxed{x_1}$

da

$$\boxed{x_{n+1} = x_n - f(x_n)\frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}}$$



Geometric
Similar Triangles

$$\frac{AB}{AE} = \frac{DC}{DE}$$

$$\frac{f(x_k)}{x_k - x_{k+1}} = \frac{f(x_{k-1})}{x_{k-1} - x_{k+1}}$$

$$\boxed{x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)(x_k - x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})}}$$

Flere dimesnional Newtons metode

Vi vil finne løsningen til systemet

$$F(\overrightarrow{x}) = \begin{cases} f_1(x_1, \ldots, x_k) = 0 \\ f_2(x_1, \ldots, x_k) = 0 \\ \ldots \\ f_k(x_1, \ldots, x_k) = 0 \end{cases}$$

Newtons metode

$$\boxed{\overrightarrow{x}_{n+1} = \overrightarrow{x}_n - \partial F(\overrightarrow{x}_n)^{-1} \cdot F(\overrightarrow{x}_n)}$$

hvor

$$\partial F(\overrightarrow{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial x_k} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial f_2}{\partial x_k} \\ \vdots & & & \vdots \\ \frac{\partial f_k}{\partial x_1} & \frac{\partial f_k}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial f_k}{\partial x_k} \end{pmatrix}$$

Polynomisk Interpolasjon

La $f(x)$ være en funksjon og $x_0, \ldots, x_n$. Da

$$\ell_i(x) = \frac{(x - x_0)\cdots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\cdots(x - x_n)}{(x_i - x_0)\cdots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\cdots(x_i - x_n)}$$

Se at

$$\ell_i(x_m) = \begin{cases} 1 & m = i \\ 0 & m \neq i \end{cases}$$

Lagrange interpolation av grad n:

$$\boxed{p_n(x) = f(x_0) \cdot \ell_0(x) + \cdots + f(x_n) \cdot \ell_n(x)}$$

Feil estimat Lagrange interpolasjon

La $p_n(x)$ være Lagrange interpolasjon til $f(x)$, da

$$\epsilon_n(x) = f(x) - p_n(x) = (x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n) \cdot \frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!}$$

der $x_0 \leq t \leq x_n$.

La $x_0 \leq a \leq x_n$, da

$$|\epsilon_n(a)| =\leq |(a - x_0)\cdots(a - x_n)| \cdot \max_{x_0 \leq t \leq x_n} \left| \frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!} \right|$$

er feil estimat.