TMA4130

Laplacetransformasjon

Eduard Ortega
Department of Mathematical sciences, NTNU
uke 40

Laplacetransformasjon

La $f(t)$ være en stykkevis kontinuerlig funksjon,

$$\mathcal{L}(f) = F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt$$

kalles Laplacetransformasjonen til $f(t)$, og

$$\mathcal{L}^{-1}(F(s)) = f(t)$$

inversen til Laplacetransformasjon.

Enhetssprang funksjon

Gitt $a > 0$, da

$$u(t-a) = \begin{cases} 0 & t < a \\ 1 & t \geq a \end{cases}$$

kalles *enhetssprang* funksjon, og

$$u(t-a)f(t-a) = \begin{cases} 0 & t < a \\ f(t-a) & t \geq a \end{cases}$$

kalles *a-skifted* funksjon.

t-skifting setning

La $f(t)$ være en stykkevis kontinuerlig funksjon, da

$$\mathcal{L}(u(t-a)f(t-a)) = e^{-as}F(s)$$

og

$$\mathcal{L}^{-1}(e^{-as}F(s)) = u(t-a) \cdot f(t-a)\,.$$

Dirac-delta funksjon

La $a > 0$, da

$$\delta(t-a) = \begin{cases} \infty & t = a \\ 0 & t \neq a \end{cases}.$$

kalles *Dirac-delta* funksjon eller *impulse* funksjon.

$$\mathcal{L}(\delta(t-a)) = e^{-as}.$$

Konvolusjonen

LA f, g, da

$$(f \star g)(t) = \int_0^t f(\tau) g(t - \tau)\, d\tau \,,$$

kalles **konvolusjon.**

Konvolusjon Setning

$$\mathcal{L}(f \star g) = \mathcal{L}(f)\mathcal{L}(g) = F(s)G(s)\,.$$

Konvolusjonen

Egenskaper av konvolusjon

La $f(t), g(t)$ og $h(t)$ være funksjoner, da

1. $f \star g = g \star f$,
2. $f \star (g + h) = f \star g + f \star h$,
3. $(f \star g) \star h = f \star (g \star h)$,
4. $f \star 0 = 0$.

Obs: $f \star 1 \neq f$!!!

Deriverter og integraler av Laplace transformasjon

Deriverte

$$\mathcal{L}(tf(t)) = -F'(s) \qquad \text{og} \qquad \mathcal{L}^{-1}(F'(s)) = -tf(t)$$

Integral

$$\mathcal{L}\left(\frac{f(t)}{t}\right) = \int_s^\infty F(u)du \qquad \text{og} \qquad \mathcal{L}^{-1}\left(\int_s^\infty F(u)du\right) = \frac{f(t)}{t}.$$