NTNU

Kunnskap for en bedre verden

TMA4130

Laplacetransformasjon

Eduard Ortega

Department of Mathematical sciences, NTNU

uke 39

Laplacetransformasjon

La $f(t)$ være en stykkevis kontinuerlig funksjon,

$$\mathcal{L}(f) = F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt$$

kalles Laplacetransformasjonen til $f(t)$, og

$$\mathcal{L}^{-1}(F(s)) = f(t)$$

inversen til Laplacetransformasjon.

Eksistens av Laplacetransformasjon

Setning

La $f(t)$ være en stykkevis kontinuerlig funksjon slikt at

$$|f(t)| \leq Me^{kt} \qquad \text{for alle } t \geq 0$$

der $M, k \geq 0$. Da

$$\mathcal{L}(f) = F(s)$$

eksisterer og er definert for $s > k$.

Egenskaper av Laplacetransformasjon

Setning

La $f(t), g(t)$ være en stykkevis kontinuerlige funksjoner, da

$$\mathcal{L}(\lambda \cdot f(t) + \beta \cdot g(t)) = \lambda \mathcal{L}(f) + \beta \mathcal{L}(g(t)) = \lambda F(s) + \beta G(s) \,.$$

s-skifting

La $f(t)$ være en stykkevis kontinuerlig funksjon, da

$$\mathcal{L}(e^{at} \cdot f(t)) = F(s-a) \,. \qquad \text{og} \qquad \mathcal{L}^{-1}(F(s-a)) = e^{at} \cdot f(t) \,.$$

vanlige Lapalcetransformasjoner

f(t)	F(s)	
1	$\frac{1}{s}$	$s > 0$
t	$\frac{1}{s^2}$	$s > 0$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$s > 0,\ n \in \mathbb{N}$
$\cos wt$	$\frac{s}{w^2+s^2}$	$s > 0$
$\sin wt$	$\frac{w}{w^2+s^2}$	$s > 0$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$	$s > a$

Egenskaper av Laplacetransformasjon

Vi antar at laplacetransformasjonene til f, f', f'' eksisterer.

Laplacetransformasjon av deriverter

$$\mathcal{L}(f') = s\mathcal{L}(f) - f(0) \qquad \text{og} \qquad \mathcal{L}(f'') = s^2\mathcal{L}(f) - sf(0) - f'(0)\,.$$

Laplacetransformasjon av integraler

$$\mathcal{L}\left(\int_0^t f(v)\,dv\right) = \frac{1}{s}F(s) \qquad \text{og} \qquad \int_0^t f(v)\,dv = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s}F(s)\right)\,.$$