NTNU

Kunnskap for en bedre verden

TMA4130

Fouriertransformasjon

Eduard Ortega

Department of Mathematical sciences, NTNU

uke 38

Fouriertransformasjon

La $f(x)$ være en stykkevis kontinuerlig funksjon, hvis

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx = \lim_{L \to \infty} \int_{-L}^{L} |f(x)| dx < \infty$$

$f(x)$ kalles **absolutt integrerbar.**

Example

1. $f(x) = x$ er integrerbar men ikke absolutt integrerbar.
2. $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ er integrerbar men ikke absolutt integrerbar.
3. $f(x) = \frac{1}{x^3}$ er absolutt integrerbar.
4. $f(x) = xe^{-x^2}$ er absolutt integrerbar.

La $f(x)$ være en absolutt integrerbar funksjon.

La $f_L(x)$ være en $2L$-periodisk funksjon slik at

$$f(x) = f_L(x) \qquad \text{for alle} \qquad -L \leq x \leq L\,.$$

Vi definerer $w_n = \frac{n\pi}{L}$, da

$$f_L(x) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(w_n x) + B_n \sin(w_n x)$$

Når $L \to \infty$ da $f_L \to f$,

$$f(x) = \int_0^{\infty} A(w)\cos(wx) + B(w)\sin(wx)\,dw$$

der

$$A(w) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(v)\cos(wv)\,dv$$

og

$$B(w) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(v)\sin(wv)\,dv$$

Husk formuler:

$$\cos a \cdot \cos b = \frac{1}{2}(\cos(a+b) + \cos(a-b))$$

$$\sin a \cdot \sin b = \frac{1}{2}(\cos(a+b) - \cos(a-b))$$

Da

$$A(w)\cos(wx) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} f(v)(\cos(x+v)w + \cos(x-v)w)\,dv$$

$$B(w)\sin(wx) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} f(v)(\cos(x-v)w - \cos(x+v)w)\,dv$$

og

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(v)\cos(x-v)w\,dv\,dw$$

Da

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(v) \cos(x - v)w \, dv \, dw \, .$$

Men

$$0 = \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(v) \sin(x - v)w \, dv \, dw \, .$$

Da

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(v)(\cos(x - v)w + i \sin(x - v)w) \, dv \, dw$$

Da

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(v)(\cos(x-v)w + i\sin(x-v)w)\,dv\,dw \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(v)e^{i(x-v)w}\,dv\,dw \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(v)e^{-ivw}\,dv\right)\,e^{ixw}\,dw
\end{aligned}
$$

Husk Eulers Formula:

$$
e^{ix} = \cos x + i\sin x
$$

La $f(x)$ være en absolutt integrerbar funksjon, da

$$\widehat{f}(w) = \mathcal{F}(f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(v) e^{-ivw} \, dv$$

kalles den **Fouriertransformasjonen** til $f(x)$.

La $\widehat{f}(w)$ da

$$\mathcal{F}^{-1}(\widehat{f}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(w) e^{iwx} \, dw$$

kalles **inversen til Fouriertransformasjonen.**

Setning

La $f(x)$ være en stykkevis kontinuerlig og absolutt integrerbar funksjon, da

$$\mathcal{F}^{-1}(\widehat{f}) = f$$

La f, g være absolutt integrerbare, da

$$\boxed{\mathcal{F}(\lambda \cdot f(x) + \beta \cdot g(x)) = \lambda \mathcal{F}(f) + \beta \mathcal{F}(g)}$$

La f være slik at $f(x) \to 0$ når $x \to \pm\infty$ og $f'(x)$ er absolutt integrerbar, da

$$\boxed{\mathcal{F}(f') = iw\mathcal{F}(f)}$$

og

$$\boxed{\mathcal{F}(f'') = -w^2\mathcal{F}(f)}$$

Konvolusjonen

LA f, g være absolutt integrerbare, da

$$(f \star g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(p)g(x-p)\,dp = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-p)g(p)\,dp$$

kalles **konvolusjon.**

Eksam vår 2015

Bruk Fourier-transformasjon for å finne funksjonen f som tilfredsstiller ligningen

$$f(x) = e^{-2|x|} - 3\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)e^{-2|x-\xi|}\,d\xi$$

Eksam høst 2013

1. La $a > 0$ være en gitt konstant, og la

$$f(x) = \begin{cases} e^{-ax}. & \text{for } x > 0 \\ 0 & \text{for } x < 0. \end{cases}$$

   Finn Fouriertransforamsjonen til $f(x)$ og finn verdien til integralet

$$\int_0^\infty \frac{\cos w - w \sin w}{1 + w^2}\, dw\,.$$

2. Finn funksjonene $f(x)$ som oppfyller

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x-t) e^{-2t^2}\, dt = e^{-x^2}\,,\ -\infty < x < \infty\,.$$

Eksam vår 2011

Det oppgis at Fouriertransformen til funksjonen $\frac{\sin ax}{x}$ (for $a > 0$) er $\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ hvis $|w| < a$, og 0 hvis $a < |w|$.
Vis at

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx = \pi\,,$$

og

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin ax}{x} \cos x\, dx = \begin{cases} \pi & a > 1 \\ \pi/2 & a = 1 \\ 0 & a < 1\,. \end{cases}$$