



TMA4130

Fouriertransformasjon

Eduard Ortega

Department of Mathematical sciences, NTNU

uke 38

Fouriertransformasjon

La $f(x)$ være en stykkevis kontinuert funksjon, hvis

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx = \lim_{L \rightarrow \infty} \int_{-L}^L |f(x)| dx < \infty$$

$f(x)$ kalles **absolutt integrerbar**.

Example

1. $f(x) = x$ er integrerbar men ikke absolutt integrerbar.
2. $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ er integrerbar men ikke absolutt integrerbar.
3. $f(x) = xe^{-x^2}$ er absolutt integrerbar.

La $f(x)$ være en absolutt integrerbar funksjon.

La $f_L(x)$ være en $2L$ -periodisk funksjon slik at

$$f(x) = f_L(x) \quad \text{for alle} \quad -L \leq x \leq L.$$

Vi definerer $w_n = \frac{n\pi}{L}$, da

$$f_L(x) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(w_n x) + B_n \sin(w_n x)$$

Når $L \rightarrow \infty$ da $f_L \rightarrow f$,

$$f(x) = \int_0^{\infty} A(w) \cos(wx) + B(w) \sin(wx) dw$$

der

$$A(w) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(v) \cos(wv) dv$$

og

$$B(w) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(v) \sin(wv) dv$$



Husk formuler:

$$\cos a \cdot \cos b = \frac{1}{2} (\cos(a + b) + \cos(a - b))$$

$$\sin a \cdot \sin b = \frac{1}{2} (\cos(a + b) - \cos(a - b))$$

Da

$$A(w) \cos(wx) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} f(v) (\cos(x + v)w + \cos(x - v)w) dv$$

$$B(w) \sin(wx) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} f(v) (\cos(x - v)w - \cos(x + v)w) dv$$

og

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(v) \cos(x - v)w dv dw$$

Da

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(v) \cos(x - v) w \, dv \, dw .$$

Men

$$0 = \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(v) \sin(x - v) w \, dv \, dw .$$

Da

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(v) (\cos(x - v) w + i \sin(x - v) w) \, dv \, dw$$

Da

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(v)(\cos(x-v)w + i \sin(x-v)w) dv dw \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(v)e^{i(x-v)w} dv dw \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(v)e^{-ivw} dv \right) e^{ixw} dw \end{aligned}$$

Husk Eulers Formula:

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

La $f(x)$ være en absolutt integrerbar funksjon, da

$$\hat{f}(w) = \mathcal{F}(f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(v) e^{-ivw} dv$$

kalles den **Fouriertransformasjonen** til $f(x)$.

La $\hat{f}(w)$ da

$$\mathcal{F}^{-1}(\hat{f}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(w) e^{iwx} dw$$

kalles **inversen til Fouriertransformasjonen**.

Setning

La $f(x)$ være en stykkevis kontinuerlig og absolutt integrerbar funksjon, da

$$\mathcal{F}^{-1}(\hat{f}) = f$$



La f, g være absolutt integrerbare, da

$$\mathcal{F}(\lambda \cdot f(x) + \beta \cdot g(x)) = \lambda \mathcal{F}(f) + \beta \mathcal{F}(g)$$

La f være slik at $f(x) \rightarrow 0$ når $x \rightarrow \pm\infty$ og $f'(x)$ er absolutt integrerbar, da

$$\mathcal{F}(f') = iw\mathcal{F}(f)$$

og

$$\mathcal{F}(f'') = -w^2\mathcal{F}(f)$$

Konvolusjonen



LA f, g være absolutt integrerbare, da

$$(f \star g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(p)g(x - p) dp = \int_{-\infty}^{\infty} f(x - p)g(p) dp$$

kalles **konvolusjon**.

Konvolusjon Setning

$$\mathcal{F}(f \star g) = \sqrt{2\pi}\mathcal{F}(f)\mathcal{F}(g)$$



Bruk Fourier-transformasjon for å finne funksjonen f som tilfredsstillir ligningen

$$f(x) = e^{-2|x|} - 3 \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{-2|x-\xi|} d\xi$$

Eksam høst 2013



1. La $a > 0$ være en gitt konstant, og la

$$f(x) = \begin{cases} e^{-ax}. & \text{for } x > 0 \\ 0 & \text{for } x < 0. \end{cases}$$

Finn Fouriertransformasjonen til $f(x)$ og finn verdien til integralet

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos w - w \sin w}{1 + w^2} dw.$$

2. Finn funksjonene $f(x)$ som oppfyller

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)e^{-2t^2} dt = e^{-x^2}, \quad -\infty < x < \infty.$$

Eksam vår 2011



Det oppgis at Fouriertransformen til funksjonen $\frac{\sin ax}{x}$ (for $a > 0$) er $\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ hvis $|w| < a$, og 0 hvis $a < |w|$.

Vis at

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \pi,$$

og

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin ax}{x} \cos x dx = \begin{cases} \pi & a > 1 \\ \pi/2 & a = 1 \\ 0 & a < 1. \end{cases}$$