NTNU
Kunnskap for en bedre verden

TMA4130

Varmeligningen og Laplacesligningen

Eduard Ortega
Department of Mathematical sciences, NTNU
uke 37

D'Alemberts løsningsform av bølgelignen

For bølgeligningen

$$\boxed{u_{tt} = c^2 \cdot u_{xx}}$$

finnes det en alternativ løsning som kan skrives på formen

$$\boxed{u(x,t) = F(x+ct) + G(x-ct)}$$

og

$$\boxed{\begin{aligned} u_{xx} &= F''(x+ct) + G''(x-ct)\,, \\ u_{tt} &= c^2 F''(x+ct) + c^2 G''(x-ct)\,. \end{aligned}}$$

D'Alemberts løsningsform av bølgelignen

$$\boxed{u_{tt} = c^2 \cdot u_{xx}}$$

$$\boxed{u(x,0) = f(x)}$$

$$\boxed{u_t(x,0) = g(x)}$$

Da

$$u(x,0) = F(x) + G(x) = f(x) \Longrightarrow G(x) = f(x) - F(x)\,,$$

$$u_t(x,0) = cF'(x) - cG'(x) = g(x) \Longrightarrow F(x) - G(x) = \frac{1}{c}\int_0^x g(x)dx + K\,,$$

derfor

$$F(x) = \frac{f(x)}{2} + \frac{1}{2c}\int_0^x g(x)dx + K$$

$$G(x) = \frac{f(x)}{2} - \frac{1}{2c}\int_0^x g(x)dx - K$$

D'Alemberts løsningsform av bølgelignen

$$F(x+ct) = \frac{f(x+ct)}{2} + \frac{1}{2c}\int_0^{x+ct} g(x)dx + K$$

$$G(x-ct) = \frac{f(x-ct)}{2} - \frac{1}{2c}\int_0^{x-ct} g(x)dx - K$$

så

$$\boxed{u(x,t) = \frac{1}{2}(f(x+ct)+f(x-ct)) + \int_{x-ct}^{x+ct} g(x)dx}$$

D'Alemberts løsningsform av bølgelignen

Anta

$$\boxed{g(x) = 0} \quad \boxed{u(0,t) = 0\,, \qquad u(L,t) = 0}$$

Da

$$\boxed{u(x,t) = \tfrac{1}{2}(f_{odd}(x+ct) + f_{odd}(x-ct))}\,.$$

der

$f_{odd}(x)$ er den $2L$-periodiske oddutvidelsen til $f(x)$.

Varmeligningen

$$u_t = c^2 \cdot u_{xx}$$

$0 \leq x \leq L, \qquad 0 \leq t < \infty$ Definisjonsområdet

$u(0, t) = g(t)$ (Temperaturen i venstre kant)
$u(L, t) = h(t)$ (Temperaturen i høyre kant)
$u(x, 0) = f(x)$ (Temperaturfordelingen ved starttidspunktet)

Varmeligningen

$$u_t = c^2 \cdot u_{xx}$$

$0 \leq x \leq L, \qquad 0 \leq t < \infty \qquad$ Definisjonsområdet

$u_x(0, t) = 0$ (Staven er isolert i venstre kant)

$u_x(L, t) = 0$ (Staven er isolert i høyre kant)

$u(x, 0) = f(x)$ (Temperaturfordelingen ved starttidspunktet)

Laplaceslikningen

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

$a \leq x \leq b, \qquad c \leq y \leq d$ Definisjonsområdet

$u(a, y) = f(y)$ (Temperaturen i venstre kant)
$u(b, y) = g(y)$ (Temperaturen i høyre kant)
$u(x, c) = h(x)$ (Temperaturen i nedre kant)
$u(x, d) = i(x)$ (Temperaturen i øvre kant)