



## **TMA4130**

### **Varmeligningen og Laplacesligningen**

Eduard Ortega

Department of Mathematical sciences, NTNU

uke 37

## D'Alemberts løsningsform av bølge lignen

For bølge ligningen

$$u_{tt} = c^2 \cdot u_{xx}$$

finnes det en alternativ løsning som kan skrives på formen

$$u(x, t) = F(x + ct) + G(x - ct)$$

og

$$\begin{aligned}u_{xx} &= F''(x + ct) + G''(x - ct), \\u_{tt} &= c^2 F''(x + ct) + c^2 G''(x - ct).\end{aligned}$$

## D'Alemberts løsningsform av bølge lignen

$$u_{tt} = c^2 \cdot u_{xx}$$

$$u(x, 0) = f(x)$$

$$u_t(x, 0) = g(x)$$

Da

$$u(x, 0) = F(x) + G(x) = f(x) \implies G(x) = f(x) - F(x),$$

$$u_t(x, 0) = cF'(x) - cG'(x) = g(x) \implies F(x) - G(x) = \frac{1}{c} \int_0^x g(x) dx + K,$$

derfor

$$F(x) = \frac{f(x)}{2} + \frac{1}{2c} \int_0^x g(x) dx + K$$

$$G(x) = \frac{f(x)}{2} - \frac{1}{2c} \int_0^x g(x) dx - K$$

## D'Alemberts løsningsform av bølge lignen

$$F(x + ct) = \frac{f(x + ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_0^{x+ct} g(x) dx + K$$

$$G(x - ct) = \frac{f(x - ct)}{2} - \frac{1}{2c} \int_0^{x-ct} g(x) dx - K$$

så

$$u(x, t) = \frac{1}{2}(f(x + ct) + f(x - ct)) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(x) dx$$

## D'Alemberts løsningsform av bølge lignen



Anta

$$g(x) = 0 \quad u(0, t) = 0, \quad u(L, t) = 0$$

Da

$$u(x, t) = \frac{1}{2}(f_{\text{odd}}(x + ct) + f_{\text{odd}}(x - ct))$$

der

$f_{\text{odd}}(x)$  er den  $2L$ -periodiske oddutvidelsen til  $f(x)$ .

## Varmeligningen



$$u_t = c^2 \cdot u_{xx}$$

$0 \leq x \leq L, \quad 0 \leq t < \infty$     Definisjonsområdet

$u(0, t) = g(t)$     (Temperaturen i venstre kant)

$u(L, t) = h(t)$     (Temperaturen i høyre kant)

$u(x, 0) = f(x)$     (Temperaturfordelingen ved starttidspunktet)

## Varmeligningen



$$u_t = c^2 \cdot u_{xx}$$

$$0 \leq x \leq L, \quad 0 \leq t < \infty \quad \text{Definisjonsområdet}$$

$$u_x(0, t) = 0 \quad (\text{Staven er isolert i venstre kant})$$

$$u_x(L, t) = 0 \quad (\text{Staven er isolert i høyre kant})$$

$$u(x, 0) = f(x) \quad (\text{Temperaturfordelingen ved starttidspunktet})$$

# Laplacesligningen



$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

$a \leq x \leq b$ ,  $c \leq y \leq d$     Definisjonsområdet

$u(a, y) = f(y)$     (Temperaturen i venstre kant)

$u(b, y) = g(y)$     (Temperaturen i høyre kant)

$u(x, c) = h(x)$     (Temperaturen i nedre kant)

$u(x, d) = i(x)$     (Temperaturen i øvre kant)