NTNU

Kunnskap for en bedre verden

TMA4130

Partielle differensialligninger og bølgeligningen

Eduard Ortega

Department of Mathematical sciences, NTNU

uke 36

La $u(x,t)$ en funksjon med variable x og t.

Partielle deriverte

$$\frac{\partial u}{\partial x} = u_x, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = u_{xx}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = u_t, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = u_{tt}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} = u_{tx} = u_{xt} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}$$

Partielle differensialligninger (PDL)

$$u_t = c \cdot u_{xx} \qquad c \text{ en konstant} \qquad \text{(varmeligningen)}$$

$$u_{tt} = c \cdot u_{xx} \qquad c \text{ en konstant} \qquad \text{(bølgeligningen)}$$

$$u_{xx} + u_{xx} = 0 \qquad \text{(Laplaceligningen)}$$

Det finnes uendelig løsninger!!

Vi trenger tilleggsbetingelser:

1. Initialbetingelser (starttidspunktet t = 0).
2. Randbetingelser (randen av definisjonsområdet).

Superposisjonsprinsippet

Laf $v(x,t), w(x,t)$ være løsningene til en lineær PDL (Bølgeligningen, Varmeligningen, Laplacesligningen,...) da:

1. $v(x,t) + w(x,t)$ er også en løsningen til PDL,
2. $\lambda \cdot v(x,t)$ er også en løsningen til PDL.

Bølgeligningen

$$u_{tt} = c^2 \cdot u_{xx}$$

$a \leq x \leq b\,, \qquad 0 \leq t < \infty \qquad$ Definisjonsområdet

$u(a,t) = h(t)$	(Bevegelsen til venstre ende-punkt)
$u(b,t) = i(t)$	(Bevegelsen til høyre ende-punkt)
$u(x,0) = f(x)$	(Start-fasongen på strengen)
$u_t(x,0) = g(x)$	(Start-hastigheten til strengen)

Separasjon av variable

$$u(x,y) = F(x) \cdot G(t)$$

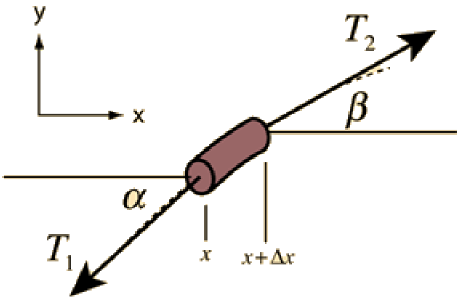
$$u_x = F'(x) \cdot G(t)$$

$$u_{xx} = F''(x) \cdot G(t)$$

$$u_t = F(x) \cdot G'(t)$$

$$u_{tt} = F(x) \cdot G''(t)$$

Bølgeligningen



ρ = mass per unit length

Bølgeligningen

$$u_{tt} = c^2 \cdot u_{xx}$$

$0 \leq x \leq L, \qquad 0 \leq t < \infty$ Definisjonsområdet

$u(0,t) = 0$ (Ingen bevegelse til venstre ende-punkt)

$u(L,t) = 0$ (Ingen bevegelse til høyre ende-punkt)

$u(x,0) = f(x)$ (Start-fasongen på strengen)

$u_t(x,0) = 0$ (Strengen er stopped i t=0)