NTNU
Kunnskap for en bedre verden

TMA4130

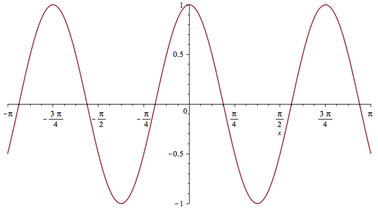
Fourier rekker

Eduard Ortega
Department of Mathematical sciences, NTNU
uke 35

La $f(x)$ være en stykkevis kontinuerlig med periode $\boxed{\text{p=2L}}$.

Noe funksjoner med periode $p = 2L$:

$\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$ $\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$



$\cos\frac{8}{3}x$ $p = \frac{3\pi}{4} = 2\frac{3\pi}{8}$.

La $f(x)$ være en stykkevis kontinuerlig funksjon med periode $2L$. Den uendelige trigonometriske rekka

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi}{L} x + b_n \sin \frac{n\pi}{L} x\right) \qquad \text{for alle } x \in \mathbb{R}$$

der koeffisientene er gitt ved

$$a_0 = \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} f(x) dx$$

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \cos \frac{n\pi}{L} x \, dx$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \sin \frac{n\pi}{L} x \, dx$$

kalles *Fourierrekka til* $f(x)$.

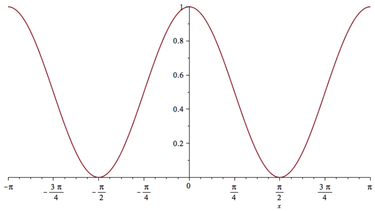
La $f(x)$ vare en $2L$-periodisk funksjon

Fourier setning

Fourier rekka til $f(x)$ vil konvergere mot $f(x)$ overalt unntatt i eventuelle punkter $x = x_0$ der $f(x)$ er diskontinuerlig. I slike punkter vil Fourierrekka konvergere mot

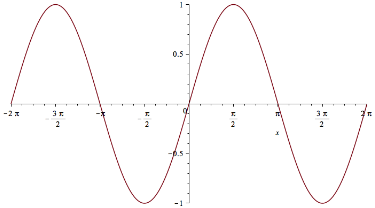
$$\frac{1}{2}\left(\lim_{x \to x_0^-} f(x) + \lim_{x \to x_0^+} f(x)\right)$$

$f(x)$ er en jevn funksjon om $f(-x) = f(x)$.



$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(x)dx = 2\int_0^{\pi/2} f(x)dx$$

$f(x)$ er en odd funksjon om $f(-x) = -f(x)$



$$
\begin{aligned}
\int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(x)dx &= \int_{-\pi/2}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{\pi/2} f(x)dx \\
&= \int_{0}^{\pi/2} f(-x)dx + \int_{0}^{\pi/2} f(x)dx \\
&= -\int_{0}^{\pi/2} f(x)dx + \int_{0}^{\pi/2} f(x)dx = 0
\end{aligned}
$$

La $f(x)$ være en funksjon med periode $p = 2L$.

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \tfrac{n\pi}{L} x + b_n \sin \tfrac{n\pi}{L} x$$

Hvis $f(x)$ er en jevn funksjon da

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \tfrac{n\pi}{L} x$$

$$a_0 = \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} f(x)dx = \frac{1}{L} \int_{0}^{L} f(x)dx$$

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \cos \frac{n\pi}{L} x \, dx = \frac{2}{L} \int_{0}^{L} f(x) \cos \frac{n\pi}{L} x \, dx$$

Hvis $f(x)$ er en odd funksjon da

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi}{L} x$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx$$

Setning

La f, g være $2L$-periodiske funksjoner, med Fourierrkker

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi}{L} x + b_n \sin \frac{n\pi}{L} x$$

og

$$g(x) = a'_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a'_n \cos \frac{n\pi}{L} x + b'_n \sin \frac{n\pi}{L} x$$

Da,

$$(f+g)(x) = (a_0 + a'_0) + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + a'_n) \cos \frac{n\pi}{L} x + (b_n + b'_n) \sin \frac{n\pi}{L} x$$

og

$$\lambda \cdot f(x) = \lambda a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda a_n \cos \frac{n\pi}{L} x + \lambda b_n \sin \frac{n\pi}{L} x$$

Odd/jevn-utvidelse

La $f(x)$ være en funksjon definert på intervallet $[0, L]$:

— Jevn utvidelsen til $f(x)$ er den $2L$-periodisk funksjonen som har Fourierreka

$$\boxed{a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi}{L} x}$$

der

$$\boxed{a_0 = \frac{1}{L} \int_0^L f(x) dx} \qquad \boxed{a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi}{L} x \, dx}$$

Odd/jevn-utvidelse

— Odd utvidelsen til $f(x)$ er den $2L$-periodisk funksjonen som har Fourierrekka

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi}{L} x}$$

der

$$\boxed{b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi}{L} x \, dx}$$

Trigonometrisk tilnærming

Den 2π-periodiske funksjonen

$$F(x) = c_0 + \sum_{n=1}^{N} c_n \cos nx + d_n \sin nx$$

kalles trigonometrisk funksjon av grad N.

La f være en 2π-periodiske funksjon, da tilnærmingsfeil av F til f er

$$E = \int_{-\pi}^{\pi} (f - F)^2 \, dx$$

Setning

Den beste trigonometriske tilnærming til $f(x)$ er

$$F(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{N} a_n \cos nx + b_n \sin nx \,,$$

hvor a_0, a_n og b_n er de Fourierkoeffisientene.

Parsevals identitet (Phytagoras)

La $f(x)$ være en 2π-periodisk funksjon, da

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 \, dx = 2a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \,.$$