NTNU
Kunnskap for en bedre verden

Institutt for matematiske fag

Eksamensoppgave i **TMA4130 Matematikk 4N**

Faglig kontakt under eksamen: Markus Grasmair
Tlf: 97 58 04 35

Eksamensdato: 10. desember 2015
Eksamenstid (fra–til): 09:00–13:00
Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler: Kode C): Tillatt enkel kalkulator. Rottmann: *Matematisk formelsamling*

Annen informasjon:

- Alle svar må begrunnes og det skal gå klart frem hvordan svarene er oppnådd.
- Alle deloppgaver teller likt ved karaktersetting.
- Lykke til!

Målform/språk: bokmål
Antall sider: 3
Antall sider vedlegg: 2

Kontrollert av:

Dato Sign

Oppgave 1 Funksjonen $f(x) = 1-x$, definert på intervallet $[0, 2]$, skal utvides til en odde funksjon g med periode 4. Skissér grafen til funksjonen g på intervallet $[-4, 4]$ og finn Fourier-rekken for g.

Oppgave 2 Det er gitt at den 2π-periodiske funksjonen f definert som $f(x) = x^2$ for $-\pi < x < \pi$, har Fourier-koeffisientene

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{\pi^2}{3}, \\ a_n &= (-1)^n \frac{4}{n^2}, \qquad && n = 1, 2, \ldots, \\ b_n &= 0, && n = 1, 2, \ldots. \end{aligned}$$

Bruk denne informasjonen for å finne summen av rekken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}.$$

Hint: Parsevals identitet!

Oppgave 3 Bruk Laplace-transformasjonen for å løse integro-differensialligningen

$$y'' + y' + y = t^2 - \int_0^t y(\tau)e^{t-\tau}\, d\tau$$

med initialverdiene

$$y(0) = 1, \qquad y'(0) = 0.$$

Oppgave 4 Utfør tre steg med fikspunktiterasjon for å løse ligningen

$$x = 1 + \frac{1}{2}\arctan x$$

ved å begynne i punktet $x_0 = 0$. Vis at iterasjonen konvergerer.

Oppgave 5 Bruk trapes-metoden med skrittlengde $h = 0.4$ for å finne en tilnærmelse T til integralet

$$I = \int_{-1}^{1} e^{-x}\, dx.$$

Finn en øvre grense for feilen $|I - T|$.

Oppgave 6

a) Gitt ligningen

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 2\frac{\partial u}{\partial t} + u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad 0 < x < \pi,\ t > 0.$$

Finn alle løsninger på formen $u(x,t) = F(x)G(t)$ som tilfredsstiller randbetingelsene

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0 \qquad \text{og} \qquad \frac{\partial u}{\partial x}(\pi,t) = 0, \qquad\qquad t > 0.$$

b) Finn den løsningen av problemet i punkt **a)** som i tillegg tilfredsstiller initialbetingelsene

$$u(x,0) = x^2, \quad 0 < x < \pi,$$
$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0, \quad 0 < x < \pi.$$

(Du kan benytte Fourier-rekken fra oppgave 2.)

Oppgave 7 Vi vil finne en numerisk løsning til den partielle differensialligningen

$$2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2y - x, \qquad 0 < x < 1,\ 0 < y < 1,$$

med randbetingelser

$$u(0,y) = 0, \quad u(1,y) = 1 + y, \qquad\qquad 0 \le y \le 1,$$
$$u(x,0) = x, \quad u(x,1) = 2x, \qquad\qquad 0 \le x \le 1.$$

Sett opp et lineært system for å finne en approksimasjon til løsningen u i punktene $(x_i, y_i) = (i \cdot h, j \cdot h)$ med $h = 1/3$.

(Det er ikke nødvendig å løse systemet.)

Oppgave 8 La $y(x)$ være funksjonen som løser den ordinære differensialligningen

$$y'' = \cos(\pi x/2) - y^2$$

med initialbetingelsene

$$y(0) = 1, \qquad\qquad y'(0) = 0.$$

Skriv om denne andre-ordens ligningen til et system av første-ordens differensialligninger og bruk forbedret Eulers metode (the improved Euler method) med skrittlengde $h = 1$ for å approksimere verdien av $y(x)$ i punktet $x = 2$.

Oppgave 9 Utfør to iterasjoner av Gauss–Seidel metoden for å løse det lineære systemet

$$\begin{aligned} 4x_1 - x_2 - x_3 &= 4, \\ x_1 + 2x_2 &= -1, \\ -x_1 - x_2 + 3x_3 &= -3. \end{aligned}$$

Bruk startverdien $x^{(0)} = (0, 0, 0)$.

Fourier

$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega x}\, d\omega$	$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x}\, dx$
$f * g(x)$	$\sqrt{2\pi}\hat{f}(\omega)\hat{g}(\omega)$
$f'(x)$	$i\omega \hat{f}(\omega)$
e^{-ax^2}	$\frac{1}{\sqrt{2a}} e^{-\omega^2/4a}$
$e^{-a\lvert x\rvert}$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a}{\omega^2+a^2}$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-\lvert\omega\rvert}$
$f(x) = 1$ for $\lvert x\rvert < a$, 0 otherwise	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin \omega a}{\omega}$

Laplace transform

$f(t)$	$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)\, dt$
$e^{at} f(t)$	$F(s-a)$
$\cos(\omega t)$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$\cosh(\omega t)$	$\frac{s}{s^2-\omega^2}$
$\sinh(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2-\omega^2}$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
$f(t-a)u(t-a)$	$e^{-sa} F(s)$
$\delta(t-a)$	e^{-as}

Numerics

- Newton's method: $x_{k+1} = x_k - f(x_k)/f'(x_k)$
- Newton's method for systems: $\mathbf{JF}(\mathbf{x}^{(k)})\mathbf{h}^{(k)} = -\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(k)})$ and $\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{h}^{(k)}$ with $(\mathbf{JF}(\mathbf{x}^{(k)}))_{ij} = \partial_j f_i(\mathbf{x}^{(k)})$
- Lagrange interpolation polynomial: $L_k(x) = \frac{(x-x_1)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n)}{(x_k-x_1)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)}$, $p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} L_k(x) f(x_k)$
- Trapezoid rule: $\int_a^b f(x)\,dx \approx h\left[\frac{1}{2}f_0 + f_1 + f_2 + \ldots + f_{n-1} + \frac{1}{2}f_n\right]$

  Error of the trapezoid rule: $|\epsilon| \le \frac{b-a}{12}h^2 \max_{a\le x\le b}|f''(x)|$.
- Simpson rule: $\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}\left[f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + \ldots + 2f_{n-2} + 4f_{n-1} + f_n\right]$ with $f_i = f(x_i)$.

  Error of the Simpson rule: $|\epsilon| \le \frac{b-a}{180}h^4 \max_{a\le x\le b}|f^{(4)}(x)|$.
- Gauß–Seidel iteration: $\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{b} - \mathbf{L}\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{U}\mathbf{x}^{(k)}$ with $\mathbf{A} = \mathbf{I} + \mathbf{L} + \mathbf{U}$.
- Jacobi iteration: $\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{b} + (\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{x}^{(k)}$
- Euler method: $\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + h\mathbf{f}(x_n, \mathbf{y}_n)$
- Improved Euler method: $\mathbf{k}_1 = h\mathbf{f}(x_n, \mathbf{y}_n)$, $\mathbf{k}_2 = h\mathbf{f}(x_n + h, \mathbf{y}_n + \mathbf{k}_1)$,

  $\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + \frac{1}{2}\mathbf{k}_1 + \frac{1}{2}\mathbf{k}_2$.
- Classical Runge–Kutte method:

  $\mathbf{k}_1 = h\mathbf{f}(x_n, \mathbf{y}_n)$, $\quad \mathbf{k}_2 = h\mathbf{f}(x_n + h/2, \mathbf{y}_n + \mathbf{k}_1/2)$,

  $\mathbf{k}_3 = h\mathbf{f}(x_n + h/2, \mathbf{y}_n + \mathbf{k}_2/2)$, $\quad \mathbf{k}_4 = h\mathbf{f}(x_n + h, \mathbf{y}_n + \mathbf{k}_3)$,

  $\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + \frac{1}{6}\mathbf{k}_1 + \frac{1}{3}\mathbf{k}_2 + \frac{1}{3}\mathbf{k}_3 + \frac{1}{6}\mathbf{k}_4$.
- Backward Euler method: $\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + h\mathbf{f}(x_{n+1}, \mathbf{y}_{n+1})$
- Finite differences:

  $\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) \approx \frac{u(x+h,y)-u(x-h,y)}{2h}$

  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) \approx \frac{u(x+h,y)-2u(x,y)+u(x-h,y)}{h^2}$

  $\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) \approx \frac{u(x,y+h)-u(x,y-h)}{2h}$

  $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) \approx \frac{u(x,y+h)-2u(x,y)+u(x,y-h)}{h^2}$