NTNU
Kunnskap for en bedre verden

Institutt for matematiske fag

Eksamensoppgave i **TMA4130 Matematikk 4N**

Faglig kontakt under eksamen: Markus Grasmair

Tlf: 97 58 04 35

Eksamensdato: 2. desember 2014

Eksamenstid (fra–til): 09:00–13:00

Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler: (Kode C): Tillatt enkel kalkulator. Rottmann: *Matematisk formelsamling*

Annen informasjon:

- Alle svar må begrunnes og det skal gå klart frem hvordan svarene er oppnådd.
- Alle 10 deloppgaver teller likt ved karaktersetting.

Målform/språk: bokmål

Antall sider: 3

Antall sider vedlegg: 2

Kontrollert av:

Dato Sign

Oppgave 1 La $f(x)$ være den 2π-periodiske funksjonen definert av

$$f(x) = \begin{cases} -\sin(x) & \text{hvis } -\pi < x \leq 0, \\ \sin(x) & \text{hvis } 0 < x \leq \pi. \end{cases}$$

a) Beregn Fourier-rekken til funksjonen $f(x)$.

b) Bruk Fourier-rekken til funksjonen $f(x)$ du beregnet i deloppgave **a)** til å finne verdien av rekken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1}$$

Oppgave 2 Finn den inverse Laplace-transformasjonen til funksjonen

$$F(s) = \frac{11 - s}{s^2 - 2s - 3}.$$

Oppgave 3 Bruk Laplace-transformasjon for å løse initialverdiproblemet

$$\begin{aligned} y'' &= y + \delta(t-1) + 2e^{t-1}u(t-1), \\ y(0) &= 0, \\ y'(0) &= 1. \end{aligned}$$

Oppgave 4

a) Finn alle ikke-trivielle løsninger av varmeligningen

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad \text{hvor} \qquad 0 \leq x \leq \pi \qquad \text{og} \qquad t \geq 0$$

som er på formen $u(x,t) = F(x) \cdot G(t)$, og som tilfredsstiller randbetingelsene

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0 \qquad \text{og} \qquad u(\pi, t) = 0 \qquad \text{for } t \geq 0.$$

b) Bruk resultatene fra **a)** til å finne løsningene som også tilfredsstiller initialbetingelsen

$$u(x,0) = \cos(x)\cos\left(\frac{3}{2}x\right) \qquad \text{for} \qquad 0 \leq x \leq \pi\,.$$

Oppgave 5

a) Finn polynomet av lavest grad som interpolerer punktene

x_i	-2	1	0	1	2
$f(x_i)$	0	2	0	1	0

b) Vi ønsker å evaluere integralet

$$\int_1^3 x^2 \ln(x) dx$$

numerisk med Simpsons metode slik at approksimasjonsfeilen er mindre enn 0,001. Hva er den største verdien av skrittlengden h vi kan velge for at ønsket nøyaktighet er garantert? Bruk denne h til å beregne en numerisk approksimasjon av integralet over med Simpsons metode. (Bruk kun 4 desimaler i beregningene dine.)

Oppgave 6 La $\mathcal{R}$ være området definert av linjene

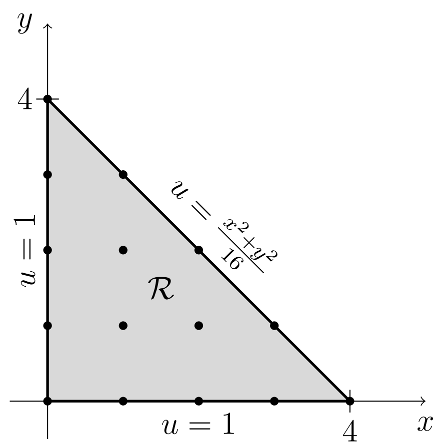
$$L_1 : y = 4 - x \qquad L_2 : y = 0 \qquad L_3 : x = 0 \,.$$

La $u(x, y)$ være funksjonen definert på $\mathcal{R}$ som tilfredsstiller Poisson-ligningen

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2xy$$

og randbetingelsene

$$\begin{array}{ll} u(x,y) = \frac{x^2+y^2}{16} & \text{hvis } (x,y) \in L_1 \\ u(x,y) = 1 & \text{hvis } (x,y) \in L_2 \\ u(x,y) = 1 & \text{hvis } (x,y) \in L_3 \end{array}$$



a) La oss definere punktene $(x_i, y_j) = (i \cdot h, j \cdot h)$, med $h = 1$. Bruk differensligningmetoden (*method of difference equations*) med $h = 1$ til å sette opp et lineært system for å finne approksimasjoner til verdiene $u(1,1)$, $u(1,2)$ og $u(2,1)$.

b) Skriv om det lineære systemet du fant i deloppgave **a)** til en slik form at du kan anvende Gauss–Seidel-metoden på det. Utfør så tre iterasjoner med Gauss–Seidel-metoden med startverdi 0 i alle variablene. (Bruk kun 4 desimaler i beregningene dine.)

Fourier

$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega x}\, d\omega$	$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x}\, dx$
$f * g(x)$	$\sqrt{2\pi}\hat{f}(\omega)\hat{g}(\omega)$
$f'(x)$	$i\omega\hat{f}(\omega)$
e^{-ax^2}	$\frac{1}{\sqrt{2a}} e^{-\omega^2/4a}$
$e^{-a\|x\|}$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a}{\omega^2+a^2}$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-\|\omega\|}$
$f(x) = 1$ for $\|x\| < a$, 0 otherwise	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin \omega a}{a}$

Laplace transform

$f(t)$	$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt$
$f'(t)$	$sF(s) - f(0)$
$tf(t)$	$-F'(s)$
$e^{at} f(t)$	$F(s-a)$
$\cos(\omega t)$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
$f(t-a)u(t-a)$	$e^{-sa}F(s)$
$\delta(t-a)$	e^{-as}

Numerics

- Newton's method: $x_{k+1} = x_k - f(x_k)/f'(x_k)$.
- Lagrange interpolation polynomial: $L_k(x) = \frac{(x-x_1)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n)}{(x_k-x_1)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)}$, $p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} L_k(x) f(x_k)$
- Trapezoid rule: $\int_a^b f(x)\,dx \approx h\Big[\frac{1}{2}f(a) + f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_{n-1}) + \frac{1}{2}f(b)\Big]$

  Error of the trapezoid rule: $|\epsilon| \leq h^2 \frac{b-a}{12} \max_{a\leq x\leq b} |f''(x)|$.
- Simpson rule: $\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}\Big[f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + \ldots + 2f_{n-2} + 4f_{n-1} + f_n\Big]$ with $f_i = f(x_i)$.

  Error of the Simpson rule: $|\epsilon| \leq h^4 \frac{b-a}{180} \max_{a\leq x\leq b} |f^{(4)}(x)|$.
- Gauss–Seidel iteration: $\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{b} - \mathbf{L}\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{U}\mathbf{x}^{(k)}$ with $\mathbf{A} = \mathbf{I} + \mathbf{L} + \mathbf{U}$.
- Jacobi iteration: $\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{b} + (\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{x}^{(k)}$
- Euler method: $\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + h\mathbf{f}(x_n, \mathbf{y}_n)$
- Improved Euler method: $\mathbf{k}_1 = h\mathbf{f}(x_n, \mathbf{y}_n)$, $\mathbf{k}_2 = h\mathbf{f}(x_n + h, \mathbf{y}_n + \mathbf{k}_1)$,

  $\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + \frac{1}{2}\mathbf{k}_1 + \frac{1}{2}\mathbf{k}_2$.
- Classical Runge–Kutte method:

  $\mathbf{k}_1 = h\mathbf{f}(x_n, \mathbf{y}_n)$, $\mathbf{k}_2 = h\mathbf{f}(x_n + h/2, \mathbf{y}_n + \mathbf{k}_1/2)$,

  $\mathbf{k}_3 = h\mathbf{f}(x_n + h/2, \mathbf{y}_n + \mathbf{k}_2/2)$, $\mathbf{k}_4 = h\mathbf{f}(x_n + h, \mathbf{y}_n + \mathbf{k}_3)$,

  $\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + \frac{1}{6}\mathbf{k}_1 + \frac{1}{3}\mathbf{k}_2 + \frac{1}{3}\mathbf{k}_3 + \frac{1}{6}\mathbf{k}_4$.
- Backward Euler method: $\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + h\mathbf{f}(x_{n+1}, \mathbf{y}_{n+1})$
- Finite differences: $\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) \approx \frac{u(x+h,y)-u(x-h,y)}{2h}$

  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) \approx \frac{u(x+h,y)-2u(x,y)+u(x-h,y)}{h^2}$

  $\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) \approx \frac{u(x,y+h)-u(x,y-h)}{2h}$

  $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) \approx \frac{u(x,y+h)-2u(x,y)+u(x,y-h)}{h^2}$