NUMERISK LØYING AV LAPLACE 'S LIKNING

Oppgåve nr. 2 side 916 i Kreyszig (utg. 9)

Vi ser på diverse metodar for å løyse systemet av lineære likningar som representerer Laplace's diff. likning med oppgitte verdiar til
u(x,y) langs randa til området.

> $with(LinearAlgebra):$

>

> # Skriv $u_{1,1}=a,\ u_{2,1}=b,\ u,\ u_{2,2}=c,\ u_{1,2}=d$

> *Vi får eit likningsystem med koeff matrise A og konstant vektor B. Vi skal bestemme a, b, c, d*

> $A, X, B := \begin{bmatrix} -4 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -26 \\ 55 \\ 26 \end{bmatrix}$

$$A, X, B := \begin{bmatrix} -4 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -26 \\ 55 \\ 26 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{(1)}$$

> $A.X$

$$\begin{bmatrix} -4a+b+d \\ a-4b+c \\ b-4c+d \\ a+c-4d \end{bmatrix} \qquad \mathbf{(2)}$$

> $Ainv := A^{-1}$

$$Ainv := \begin{bmatrix} -\frac{7}{24} & -\frac{1}{12} & -\frac{1}{24} & -\frac{1}{12} \\ -\frac{1}{12} & -\frac{7}{24} & -\frac{1}{12} & -\frac{1}{24} \\ -\frac{1}{24} & -\frac{1}{12} & -\frac{7}{24} & -\frac{1}{12} \\ -\frac{1}{12} & -\frac{1}{24} & -\frac{1}{12} & -\frac{7}{24} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{(3)}$$

> $X := \begin{bmatrix} u_{1,1} \\ u_{2,1} \\ u_{2,2} \\ u_{1,2} \end{bmatrix}$:

> $X = Ainv.B$

$$\begin{bmatrix} u_{1,1} \\ u_{2,1} \\ u_{2,2} \\ u_{1,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ -16 \\ -11 \end{bmatrix} \quad (4)$$

> **# Dette er altså løysinga, som vi fann lett ved å invertere koeffisient matrisa A**

>

> **#\` \`Men la oss også sjekke korleis Gauss eliminasjon vil foregå** :

> *# den utvida koeffisient-matrise er*

>

> $Aext := \begin{bmatrix} -4 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -4 & 1 & 0 & -26 \\ 0 & 1 & -4 & 1 & 55 \\ 1 & 0 & 1 & -4 & 26 \end{bmatrix}$

$$Aext := \begin{bmatrix} -4 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -4 & 1 & 0 & -26 \\ 0 & 1 & -4 & 1 & 55 \\ 1 & 0 & 1 & -4 & 26 \end{bmatrix} \quad (5)$$

> **# Vi illustrerer Gauss eliminasjon ved å finne LU-dekomposisjonen til Aext, altså Aext = PLU = LU** (**P = Id når det er unødvendig å byte rader**)

>

> $LUDecomposition(Aext)$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{4} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{4}{15} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{15} & -\frac{2}{7} & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -4 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -\frac{15}{4} & 1 & \frac{1}{4} & -\frac{105}{4} \\ 0 & 0 & -\frac{56}{15} & \frac{16}{15} & 48 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{24}{7} & \frac{264}{7} \end{bmatrix} \quad (6)$$

> *# Dette viser at Gauss eliminasjon ville ha leda oss til den utvida øvre triangulære matrise:*

>

>
$$U = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -\frac{15}{4} & 1 & \frac{1}{4} & -\frac{105}{4} \\ 0 & 0 & -\frac{56}{15} & \frac{16}{15} & 48 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{24}{7} & \frac{264}{7} \end{bmatrix}$$

> **# og ved tilbakesubstitusjon er det lett å finne løysinga d = -11, C =-16, b = 2,   a =-2**

> **# Illustrasjon av Gauss-Seidel iterasjon.**

> *# La oss også sjå kva som skjer når vi vil løyse det lineære likningsystemet $AX = B$ ovanfor ved Gauss –Seidel iterasjon..Først må vi omforme likningsystemet slik at den nye koeffisient matrise (som vi framleis vil kalle A) har berre 1 - tal på diagonalen.*

> $A, B := -\frac{1}{4}\cdot\begin{bmatrix} -4 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -4 \end{bmatrix}, -\frac{1}{4}\cdot\begin{bmatrix} -1 \\ -26 \\ 55 \\ 26 \end{bmatrix}$

$$A, B := \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & 1 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & 1 & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{13}{2} \\ -\frac{55}{4} \\ -\frac{13}{2} \end{bmatrix} \quad \textbf{(7)}$$

> **Vi skriv no A = L +I + U, der L er nedre og U er øvre triangulær med berre 0 på diagonalen.Likningsystemet kan skrivast som (I+L)X = -UX + B. Hvis no P er matrisa I+L, og Q den inverse, så får vi X åleine på venstre side av likninga ved å skrive X = -Q.U.X + Q.B.**

>

>

> $P, U, Q := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{4} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{4} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix}^{-1}$

$$P, U, Q := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{4} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{16} & \frac{1}{4} & 1 & 0 \\ \frac{17}{64} & \frac{1}{16} & \frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix} \qquad \textbf{(8)}$$

> **# Vi definerer C = -Q.U og K = Q.B**:

> $C, K := -Q.U, Q.B$

$$C, K := \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{16} & \frac{1}{4} & \frac{1}{16} \\ 0 & \frac{1}{64} & \frac{1}{16} & \frac{17}{64} \\ 0 & \frac{17}{256} & \frac{1}{64} & \frac{33}{256} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{105}{16} \\ -\frac{775}{64} \\ -\frac{2423}{256} \end{bmatrix} \qquad \textbf{(9)}$$

> **# No har vi likningsystemet X = CX + K, klar til vanleg iterasjon : X(n+1)= C.X(n)+K:**

> $a, b, c, d := 100.0, 100.0, 100.0, 100.0; Digits := 4$

$$a, b, c, d := 100.0, 100.0, 100.0, 100.0$$

$$Digits := 4 \qquad \textbf{(10)}$$

> $X := \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$

$$X := \begin{bmatrix} 100.0 \\ 100.0 \\ 100.0 \\ 100.0 \end{bmatrix} \qquad \textbf{(11)}$$

> **for** i **from** 1 **to** 20 **do** $X := C.X + K$ **end do**

$$X := \begin{bmatrix} 50.2500000000000 \\ 44.0625000000000 \\ 22.2606250000000 \\ 11.6251562500000 \end{bmatrix}$$

$$X := \begin{bmatrix} 14.1719140625000 \\ 15.6081347656250 \\ -6.94167724609375 \\ -4.69244079589844 \end{bmatrix}$$

$$X := \begin{bmatrix} 2.97892349243164 \\ 5.50931156158447 \\ -13.5457823085785 \\ -9.14171470403671 \end{bmatrix}$$

$$X := \begin{bmatrix} -0.658100785613060 \\ 2.94902922645211 \\ -15.2981713693961 \\ -10.4890680387523 \end{bmatrix}$$

$$X := \begin{bmatrix} -1.63500970307505 \\ 2.26670473188220 \\ -15.8055908267175 \\ -10.8601501324481 \end{bmatrix}$$

$$X := \begin{bmatrix} -1.89836135014149 \\ 2.07401195578525 \\ -15.9465345441657 \\ -10.9612239735768 \end{bmatrix}$$

$$X := \begin{bmatrix} -1.97180300444789 \\ 2.02041561284660 \\ -15.9852020901826 \\ -10.9892512736576 \end{bmatrix}$$

$$X := \begin{bmatrix} -1.99220891520275 \\ 2.00564724865367 \\ -15.9959010062510 \\ -10.9970274803634 \end{bmatrix}$$

$$X := \begin{bmatrix} -1.99784505792744 \\ 2.00156348395539 \\ -15.9988659991020 \\ -10.9991777642574 \end{bmatrix}$$

$$X := \begin{bmatrix} -1.99940357007549 \\ 2.00043260770562 \\ -15.9996862891379 \\ -10.9997724648034 \end{bmatrix}$$

$$X := \begin{bmatrix} -1.99983496427443 \\ 2.00011968664691 \\ -15.9999131945391 \\ -10.9999370397034 \end{bmatrix}$$

$$X := \begin{bmatrix} -1.99995433826412 \\ 2.00003311679919 \\ -15.9999759807260 \\ -10.9999825797475 \end{bmatrix}$$

$$X := \begin{bmatrix} -1.99998736573709 \\ 2.00000916338422 \\ -15.9999933540908 \\ -10.9999951799570 \end{bmatrix}$$

$$X := \begin{bmatrix} -1.99999650414319 \\ 2.00000253544149 \\ -15.9999981611289 \\ -10.9999986663180 \end{bmatrix}$$

$$X := \begin{bmatrix} -1.99999903271913 \\ 2.00000070153800 \\ -15.9999994911950 \\ -10.9999996309785 \end{bmatrix}$$

$$X := \begin{bmatrix} -1.99999973236013 \\ 2.00000019411122 \\ -15.9999998592168 \\ -10.9999998978942 \end{bmatrix}$$

$$X := \begin{bmatrix} -1.99999992594576 \\ 2.00000005370935 \\ -15.9999999610462 \\ -10.9999999717480 \end{bmatrix}$$

$$X := \begin{bmatrix} -1.99999997950966 \\ 2.00000001486103 \\ -15.9999999892217 \\ -10.9999999921829 \end{bmatrix}$$

$$X := \begin{bmatrix} -1.99999999433046 \\ 2.00000000411195 \\ -15.9999999970177 \\ -10.9999999978370 \end{bmatrix}$$

$$X := \begin{bmatrix} -1.99999999843127 \\ 2.00000000113775 \\ -15.9999999991748 \\ -10.9999999994015 \end{bmatrix} \tag{12}$$

> # **Dette illustrerer at Gauss-Seidel iterasjon fører til den korrekte løysingsvektor** (**-2, 2, -16, -11**)

>