Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

TMA4130
Matematikk 4N
Høst 2011

Øving 9

1 **a)** Finn alle funksjoner av formen $u(x,y) = F(x)G(y)$ i rektangelet $0 < x < a, 0 < y < b$, som tilfredstiller

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad \text{og} \quad u_x(0,y) = u_x(a,y) = u(x,0) = 0.$$

b) Finn den funksjonen som i tillegg til betingelsene under punkt **a)**, tilfredstiller,

$$u(x,b) = \cos\frac{\pi x}{a} + \cos\frac{2\pi x}{a}.$$

2 Hint: Ang. løsningsmetode, bruk Fourier transform, ikke separasjon av variable. Løsningen presenteres først som et dobbelt- integral. For å omforme dobbelt-integralet til et enkelt integral, bruk at: $\mathscr{F}\{e^{-ax^2}\} = \frac{1}{\sqrt{2a}}e^{-\frac{w^2}{4a}}$

Løs den partielle differensialligningen

$$\frac{\partial u}{\partial t} = t\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

der $-\infty < x < \infty$ og $t \geq 0$, under betingelsene

i) $\lim_{x\to\pm\infty} u(x,t) = 0$ og $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{\partial u}{\partial x}(x,t) = 0$,

ii) $u(x,0) = f(x)$,

der $f(x)$ er en funksjon som har en Fourier-transformert.

Vis at svaret kan skrives på formen

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x - st)g(s)\,\mathrm{d}s,$$

der funksjonen $g(s)$ skal bestemmes.

Fasit: $g(s) = e^{-\frac{1}{2}s^2}$

Fra Kreyszig 9. utgave, avsnitt 19.1, side 786:

3 Løs ligningen

$$x^2 - 20x + 1 = 0$$

ved å bruke (6) og (7) på side 785 i boken. Bruk 6S (seks signifikante siffer) i alle mellomregningene. Sammenlign resultatene og kommenter.

Fasit: Fra (6): $x_1 = 19{,}9499$, $x_2 = 0{,}0501$. Fra (7): $x_1 = 19{,}9499$, $x_2 = 0{,}0501256$.

4 Bevis teorem 1 del **a)** på side 784 i boken, for addisjon.

Fra Kreyszig 9. utgave, avsnitt 19.2, side 796–797:

5 Bruk fikspunktiterasjoner til å finne roten nær 1 til ligningen

$$f(x) = x^4 - x + 0{,}2 = 0,$$

der $x_0 = 1$.

Fasit:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
x_n	1	0,9457	0,9293	0,9241	0,9225	0,9220	0,9218	0,9217	0,9217

6 Ved å bruke Newtons metode, løs ligningen

$$x = \cos x, \qquad x_0 = 1.$$

Skissér funksjonene som inngår i ligningen.

Fasit:

n	0	1	2	3	4
x_n	1	0,750364	0,739113	0,739085	0,739085

7 Ved å bruke sekantmetoden, løs ligningen

$$e^{-x} - \tan x = 0, \quad x_0 = 1, \quad x_1 = 0{,}7.$$

Fasit:

n	0	1	2	3	4	5	6
x_n	1	0,7	0,577094	0,534162	0,531426	0,531391	0,531391