



- 1 a) Finn alle løsninger på formen $u(x, t) = F(x)G(t)$ til differensialligningen

$$u_{tt} + u_t = u_{xx} \quad \text{for } 0 \leq x \leq \pi, \quad t \geq 0, \quad (1)$$

med randbetingelser

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \quad t \geq 0. \quad (2)$$

- b) Finn $u(x, t)$ som oppfyller (1) og (2) samt initialbetingelsene

$$u(x, 0) = 0 \quad \text{og} \quad u_t(x, 0) = \sin 4x.$$

- 2 a) Finn alle løsninger på formen $u(x, t) = F(x)G(t)$ til differensialligningen

$$u_t = 4u_{xx}, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0, \quad (3)$$

med randbetingelser

$$u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad t \geq 0. \quad (4)$$

- b) I tillegg til (3) og (4) innfører vi nå initialbetingelsen

$$u(x, 0) = \sin \pi x + \frac{1}{3} \sin 3\pi x. \quad (5)$$

Finn funksjonen $u(x, t)$ som oppfyller (3), (4) og (5).

Fra Kreyzig, Avsnitt 12.4, side 552:

- 3 Vis at randbetingelsene, $u(0, t) = u(L, t) = 0$, gir at funksjonen f må være odde og ha periode $2L$, der

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [f(x + ct) + f(x - ct)]$$

er d'Alemberts løsning til bølge-ligningen med initialbetingelser $u(x, 0) = f(x)$ og $u_t(x, 0) = 0$.

Fra Kreyzig, Avsnitt 12.5, side 560–562:

4 Løs diffusjonsligningen

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

med randbetingelser

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0,$$

og initialbetingelse

$$f(x) = \begin{cases} U_0 & \text{for } 0 < x < \frac{\pi}{2}, \\ 0 & \text{for } \frac{\pi}{2} < x < \pi, \end{cases}$$

der U_0 er en konstant forskjellig fra 0.

Fasit: $u(x, t) = \frac{4U_0}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin^2 \frac{n\pi}{4} \sin nx e^{-n^2 c^2 t} = \frac{4U_0}{\pi} \left(\frac{1}{2} \sin x e^{-c^2 t} + \frac{1}{2} \sin 2x e^{-4c^2 t} + \dots \right)$.

Fra Kreyzig, Avsnitt 12.6, side 568–569:

5 Løs den partielle differensialligningen

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

som tilfredstiller initialbetingelsen

$$u(x, 0) = f(x) = e^{-k|x|} \quad (k > 0),$$

der løsningen er på formen

$$u(x, t) = \int_0^{\infty} [A(p) \cos px + B(p) \sin px] e^{-c^2 p^2 t} dp.$$

Fasit: $u(x, t) = \frac{2k}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos px}{p^2 + k^2} e^{-c^2 p^2 t} dp$.