Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

TMA4130
Matematikk 4N
Høst 2011

Øving 7

1 Bruk Fourier-transformasjonen til å finne $f(x)$ når

$$f(x) = e^{-|x|} - 4\int_{-\infty}^{\infty} f(p)e^{-|x-p|}\,\mathrm{d}p.$$

Oppgitt Fourier-transformert: $\mathscr{F}(e^{-a|x|}) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{a}{a^2+w^2} \quad (a>0)$

2 Funksjonene $f(x)$ og $g(x)$ er definert ved

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{for } |x|<1, \\ 0 & \text{ellers,} \end{cases} \qquad \text{og} \qquad g(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{for } x>0, \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

a) Vis at de Fourier-transformerte av $f(x)$ og $g(x)$ er

$$\hat{f}(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin w}{w} \qquad \text{og} \qquad \hat{g}(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1-iw}{1+w^2}.$$

b) La $h(x)$ være konvolusjonen av $f(x)$ og $g(x)$. Gjør rede for at

$$h(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(1-iw)\sin w}{w(1+w^2)}e^{iwx}\,\mathrm{d}w$$

og bestem verdien av integralet

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin w}{w(1+w^2)}\,\mathrm{d}w.$$

(Du kan bruke, uten bevis, at $h(x)$ er kontinuerlig.)

3 Løs den partielle differensialligningen

$$u_y + 2yu = 0$$

der $u = u(x,y)$.

4 Løs den partielle differensialligningen

$$u_{xx} = 4y^2u$$

der $u = u(x,y)$.

5 Løs den partielle differensialligningen

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

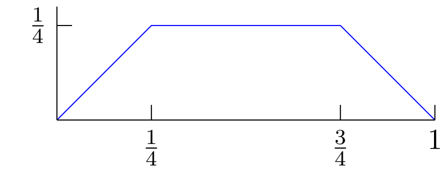
med randverdibetingelser

$$u(0,t) = u(1,t) = 0,$$

og initialbetingelser

$$u(x,0) = f(x) \qquad \text{og} \qquad u_t(x,0) = 0,$$

der grafen til $f(x)$ er gitt ved



6 Løs den partielle differensialligningen

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

med randverdibetingelser

$$u(0,t) = u(1,t) = 0,$$

og initialbetingelser

$$u(x,0) = f(x) \qquad \text{og} \qquad u_t(x,0) = 0,$$

der grafen til $f(x)$ er gitt ved