Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Øving 5

$\boxed{1}$ Vis at de komplekse Fourier-koeffisientene til en jevn funksjon er reelle, og at de komplekse Fourier-koeffisientene til en odde funksjon er rent imaginære.

$\boxed{2}$ Finn den komplekse Fourier-rekken til funksjonen

$$f(x) = x^2 \qquad (-\pi < x < \pi).$$

$\boxed{3}$ Skriv den komplekse Fourier-rekken til funksjonen

$$f(x) = x^2 \qquad (-\pi < x < \pi),$$

på reell form.

$\boxed{4}$ Finn det trigonometriske polynomet $F(x) = A_0 + \sum_{n=1}^{N}(A_n \cos nx + B_n \sin nx)$ som minimerer feilen

$$E = \int_{-\pi}^{\pi} \big(f(x) - F(x)\big)^2 \mathrm{d}x,$$

der $f(x) = e^{-|x|}$ for $-\pi < x < \pi$. Regn ut E for $N = 1, 2, \ldots, 5$.

$\boxed{5}$ Det oppgis at funksjonen $f(x) = \sin^2 x$ for $0 \le x \le \pi$ har Fourier-sinusrekke gitt ved

$$-\frac{8}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\sin(2m+1)x}{(2m-1)(2m+1)(2m+3)}. \qquad (*)$$

Skissér grafen til summen av rekken $(*)$ for $-2\pi \le x \le 2\pi$. Bruk $(*)$ til å finne summen av rekken

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{(2m-1)(2m+1)(2m+3)}.$$