TMA4130
Matematikk 4N
Høst 2011

Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Øving 13

Kun de med for **få** godkjente øvinger kan levere øving 13. Mangler du én øving må du forsøke å besvare *minst* halvparten av oppgavene. Mangler du to øvinger må du forsøke å besvare *alle* oppgavene.

Alle oppfordres til å regne gjennom øvingen, da alle øvingene er pensum.

Innleveringsfrist: Fredag 25 November, kl 16:00

1 La $y = y(x)$ være funksjonen som tilfredsstiller den andre ordens differensialligningen

$$y'' - (1 - y^2)y' + y = 0 \tag{$*$}$$

med startbetingelser $y(0) = 2$, $y'(0) = 0$.

a) Skriv om ligning $(*)$ til et system av første ordens differensialligninger. Hva blir startverdiene for dette systemet?

Vi ønsker å løse systemet av differensialligninger

$$\mathbf{y}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}), \quad \mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}_0$$

numerisk. Vi har, blant andre metoder, studert Eulers metode for denne typen ligninger. Et alternativ, kjent som «baklengs Euler» er gitt ved

$$\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + h\mathbf{f}(x_{n+1}, \mathbf{y}_{n+1}), \tag{$**$}$$

der h er skrittlengden og $x_{n+1} = x_n + h$. Vi antar at $\mathbf{y}_n$ er kjent, og $(**)$ brukes for å finne tilnærmelsen $\mathbf{y}_{n+1}$. Metoden er *implisitt* siden funksjonen $\mathbf{f}$ beregnes i den ukjente løsningen $\mathbf{y}_{n+1}$. Vi finner denne ved å løse et ikke-lineært ligningssystem.

b) La $h = 0{,}1$, og sett opp det ikke-lineære ligningssystemet du får når du ønsker å utføre et skritt med baklengs Euler på systemet du fant i oppgave **a)**.

c) Gjør en iterasjon med Newtons metode på ligningssystemet

$$\begin{aligned} 10y_1 - y_2 - 20 &= 0 \\ y_1 + (9 + y_1^2)y_2 &= 0. \end{aligned}$$

Bruk $y_1 = 2$ og $y_2 = 0$ som startverdier for iterasjonen.

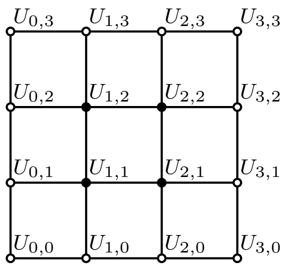
2 I et anisotropt materiale, der varmekonduktiviteten i y-retningen er to ganger høyere enn i x-retningen, tar den stasjonære diffusjonsligningen (varmeligningen) formen

$$u_{xx} + 2u_{yy} = 0. \qquad (*)$$

Vi vil løse $(*)$ numerisk. Området er et kvadrat med sidelengde 1 og randbetingelser gitt ved

$$\begin{aligned} u(x,0) &= u(0,y) = 0 \\ u(x,1) &= u(1,y) = 1, \end{aligned}$$

for $x, y \in [0,1]$. Vi betrakter det følgende gitteret



der $h = 1/3$ og $U_{i,j} \approx u(ih, jh)$.

a) Vis at differenseskjemaet som tilsvarer $(*)$ er

$$U_{i+1,j} + U_{i-1,j} + 2U_{i,j+1} + 2U_{i,j-1} - 6U_{i,j} = 0.$$

b) Sett opp systemet som $U_{i,j}$ $(i,j = 1,2)$ tilfredstiller og gjør en iterasjon med Gauss–Seidel med startpunktet $U_{1,1}^{(0)} = U_{2,1}^{(0)} = U_{1,2}^{(0)} = U_{2,2}^{(0)} = 1/2$.

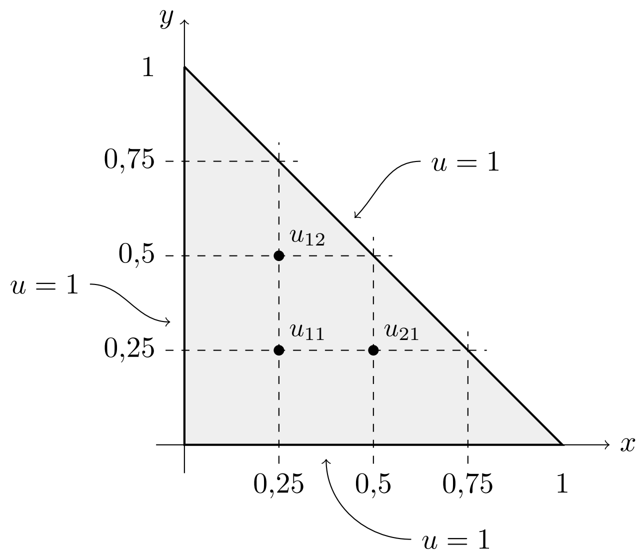
3 Gitt Poisson-ligningen

$$u_{xx} + u_{yy} = -1$$

i et område R, gitt ved

$$R = \{(x,y) \mid 0 < x < 1, 0 < y < 1 - x\},$$

og med $u(x,y) = 1$ på randen av R, se figuren under.



La $u_{ij} \approx u(x_i, y_j)$, med $x_i = ih$ og $y_j = jh$. Bruk skrittlengde $h = 0{,}25$ i både x- og y-retning og sett opp differanseligningene for u_{ij} i hvert av de indre punktene.

Finn u_{11}, u_{12} og u_{21}.

4 Gitt problemet

$$(*) \quad \begin{cases} u_t = u_{xx} + u_x & (t > 0,\ 0 < x < 1) \\ u(0,t) = u(1,t) = t & (t \geq 0) \\ u(x,0) = 8x(1-x) & (0 \leq x \leq 1). \end{cases}$$

a) Sett opp et *eksplisitt* differanseskjema for $(*)$ (tilsvarende ligning (4) side 923 i boken, men ta hensyn til det ekstra leddet u_x).

La $h = 1/4$, $k = 1/16$ og finn tilnærmelser til $u(1/4, 1/16), u(1/2, 1/16)$ og $u(3/4, 1/16)$.

b) Modifiser Crank–Nicolsons metode (ligning (7) side 924 i boken) slik at du kan bruke den til å løse $(*)$. Velg h og k som i oppgave **a)**, og sett opp det lineære ligningssystemet som må løses for første skritt.

c) Utfør to Gauss–Seidel iterasjoner på ligningssystemet fra oppgave **b)**. Bruk initialverdiene $u(ih, 0)$, $i = 1, 2, 3$ som startverdi på iterasjonene.

5 **a)** Vi vil løse ligningen

$$u_{xx} + u_{yy} = 27(x + y),$$

på enhetskvadratet $[0,1] \times [0,1]$ med randbetingelser

$$u(0,y) = u(x,0) = 0, \quad u(x,1) = 3x, \quad u(1,y) = 3y.$$

Finn en tilnærming til løsningen $u(x,y)$ ved å bruke sentraldifferanser for å approksimere u_{xx} og u_{yy}. La $h = 1/3$ være skrittlengden, og la gitteret være gitt av punktene $(x_i, y_j) = (ih, jh)$ for $i, j = 0, \ldots, 3$. Sett opp et system av ligninger for $U_{1,1}, U_{2,1}, U_{1,2}$ og $U_{2,1}$, der $U_{i,j} \approx u(x_i, y_j)$.

b) Utfør én Gauss–Seidel iterasjon på systemet du fikk i oppgave **a)**. Bruk som startvektor $\mathbf{x}_0 = -(1, 1, 1, 1)$.

6 Løs initialverdiproblemet

$$f'(t) = e^{2t}\sin t + \int_0^t e^{2u}(\cos u + 2\sin u)f(t-u)\,du, \quad t \geq 0,$$
$$f(0) = 0,$$

ved hjelp av Laplace-transformasjon.

7 La $0 < a < \pi$ og la $f(x)$ være en jevn funksjon med periode 2π som oppfyller

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{for } 0 \leq x \leq a, \\ 0 & \text{for } a < x \leq \pi. \end{cases}$$

a) Vis at Fourier-rekken til $f(x)$ er

$$\frac{a}{\pi} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin na}{n} \cos nx.$$

b) Finn summen av rekkene

$$\text{i)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin na}{n}, \qquad \text{ii)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2na}{2n}.$$

8 **a)** La $f(x)$ være funksjonen

$$f(x) = \begin{cases} 2 - |x| & \text{for } -2 \leq x \leq 2, \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

Finn den Fourier-transformerte til $f(x)$.

b) Bruk resultatet fra oppgave **a)** til å beregne

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin^2 w}{w^2}\,dw.$$

9 Gitt følgende partielle differensialligning

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = e^{-x^2}, \quad -\infty < x < \infty, \quad t \geq 0,$$

med randkravene

$$\lim_{x\to\pm\infty} u(x,t) = \lim_{x\to\pm\infty} u_x(x,t) = 0.$$

Vis at en løsning som oppfyller initialbetingelsen

$$u(x,0) = 0,$$

er gitt på formen

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-\frac{w^2}{4}} g(w,t) \cos wx \; \mathrm{d}w.$$

Funksjonen $g(w,t)$ skal bestemmes.