Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

TMA4130 Matematikk 4N Høst 2011

Øving 11

$\boxed{1}$ Tredjegradspolynomet

$$p(x) = x^3 - x - 1,$$

har en rot s som ligger i intervallet $I = [1, 1{,}5]$.

a) Gitt følgende tre fikspunktiterasjoner,

$$\begin{aligned} &1) \quad x_{n+1} = x_n^3 - 1, \\ &2) \quad x_{n+1} = \frac{1}{x_n} + \frac{1}{x_n^2}, \\ &3) \quad x_{n+1} = \sqrt[3]{x_n + 1}. \end{aligned}$$

Hvilken av disse ville du valgt for å finne s? Begrunn svaret. Bruk iterasjoner med startverdi $x_0 = 1$ og regn ut s med tre korrekte siffer.

b) En alternativ måte å approksimere s på er å først approksimere $p(x)$ med et andregradspolynom, for så å finne nullpunkt til dette med andregradsformelen. Finn denne approksimasjonen til s når andregradspolynomet konstrueres ved å interpolere $p(x)$ i $x = 0$, $x = 1$ og $x = 2$.

Fra Kreyszig 9. utgave, avsnitt 20.2, side 844–845:

$\boxed{2}$ Løs systemet

$$\begin{aligned} 2x_1 + 9x_2 &= 41 \\ 3x_1 - 5x_2 &= -31, \end{aligned}$$

ved hjelp av Doolittles metode. Vis LU-faktoriseringen.

Fasit: $x_1 = -2$, $x_2 = 5$.

$\boxed{3}$ Løs systemet

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 2x_3 &= 0 \\ -2x_1 + 2x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 &= 36, \end{aligned}$$

ved hjelp av Doolittles metode. Vis LU-faktoriseringen.

Fasit: $x_1 = 4$, $x_2 = 8$, $x_3 = -8$.

$\boxed{4}$ Løs systemet

$$\begin{aligned} 0{,}04x_1 \qquad\qquad + 0{,}12x_3 &= 1{,}4 \\ 0{,}64x_2 + 0{,}32x_3 &= 1{,}6 \\ 0{,}12x_1 + 0{,}32x_2 + 0{,}56x_3 &= 5{,}4, \end{aligned}$$

ved hjelp av Choleskys metode. Vis LL^T-faktoriseringen.

Fasit: $x_1 = 5{,}0$, $x_2 = -2{,}5$, $x_3 = 10{,}0$.

Fra Kreyszig 9. utgave, avsnitt 20.3, side 850–851:

$\boxed{5}$ Utfør 5 Gauss–Seidel iterasjoner på systemet

$$\begin{aligned} 4x_1 - x_2 \qquad &= 21 \\ -x_1 + 4x_2 - x_3 &= -45 \\ - x_2 + 4x_3 &= 33, \end{aligned}$$

med $\mathbf{x_0} = [1\ 1\ 1]^T$, der vi regner med 6S.

Fasit: $x_1^{(5)} = 2{,}99969$, $x_2^{(5)} = -9{,}00015$, $x_3^{(5)} = 5{,}99996$.

$\boxed{6}$ Gitt matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 1 & 9 & -2 \\ 8 & 2 & -1 \end{bmatrix},$$

regn ut

(1) $$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} a_{jk}^2},$$ (Frobenius-normen)

(2) $$\|A\|_1 = \max_{1\le k\le 3} \sum_{j=1}^{3} |a_{jk}|,$$ (søylenormen)

(3) $$\|A\|_\infty = \max_{1\le j\le 3} \sum_{k=1}^{3} |a_{jk}|.$$ (radnormen)

Fasit: $\|A\|_F \approx 13{,}89$, $\|A\|_1 = 12$, $\|A\|_\infty = 12$.