Kunnskap for en bedre verden

Institutt for matematiske fag

Eksamensoppgave i **TMA4125 Matematikk 4N**

Faglig kontakt under eksamen: Anne Kværnø [a], Louis-Philippe Thibault [b]

Tlf: [a] 92 66 38 24 , [b] 92 31 02 95

Eksamensdato: 31 mai, 2018

Eksamenstid (fra–til): 09:00 – 13:00

Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler: Kode C:
Bestemt, enkel kalkulator
Rottmann: Matematisk formelsamling

Annen informasjon:

- Alle svar må begrunnes og det skal klart fremgå hvordan svarene er oppnådd.
- Alle delpunkter teller likt ved karaktersetting.
- Lykke til!

Målform/språk: bokmål

Antall sider: 3

Antall sider vedlegg: 2

Kontrollert av:

Informasjon om trykking av eksamensoppgave	
Originalen er:	
1-sidig ☐	**2-sidig** ☒
sort/hvit ☒	**farger** ☐
skal ha flervalgskjema ☐	

Dato Sign

Oppgave 1 La $f(x)$ være gitt ved $f(x) = x$ for $x \in [0, 3]$.

a) Finn Fourier sinus-rekka til $f(x)$.

b) Bruk resultatet til å finne verdien av rekka $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

Hint: Bruk Parsevals identitet.

Oppgave 2 La

$$f(x) = \frac{4}{x^2 + 2} \qquad \text{og} \qquad g(x) = \frac{2x}{(x^2+1)^2}, \qquad \text{for alle reelle } x.$$

Vis at foldingen (convolution) er

$$(f * g)(x) = -\pi\sqrt{2}i \int_{-\infty}^{\infty} \omega e^{-(\sqrt{2}+1)|\omega|} e^{i\omega x} \mathrm{d}\omega.$$

Oppgave 3 Løs følgende differensialligning ved hjelp av Laplace-transformasjoner:

$$y'' + 3y' + 2y = \begin{cases} 4t & \text{hvis } 0 < t \leq 1 \\ 4 & \text{hvis } t > 1, \end{cases}$$

med startbetingelser $y(0) = 0$ og $y'(0) = 0$.

Oppgave 4 Betrakt ligningen $x = \frac{1}{2}\cos(x)$.

a) Vis at denne ligningen har en unik løsning i intervallet $(0, 1)$.

b) Gjør 2 iterasjoner med Newtons metode for å finne løsningen, start med $x_0 = 0.5$.

Bruk 5 siffer i beregningene.

Oppgave 5 Gitt differensialligningen

$$y' = xy^2, \qquad y(1) = 0.5.$$

a) Beregn en tilnærmet løsning $y_1^H \approx y(1.1)$ ved et skritt med Heuns metode, med steglengde $h = 0.1$.

b) Beregn en tilnærmet løsning $y_1^E \approx y(1.1)$ ved et skritt med Eulers metode, med steglengde $h = 0.1$.

Bruk resultatet fra punkt **a)** til å finne et estimat for feilen $y(1.1) - y_1^E$.

Gitt en toleranse $\text{Tol} = 10^{-3}$, vil du da akseptere y_1^E som en tilstrekkelig nøyaktig tilnærmelse?

Enten du aksepterer tilnærmelsen eller ikke, hva bør steglengden for neste steg være?
Bruk $P = 0.8$ som pessimistfaktor i algoritmen for valg av steglengde.

Hint: Eulers metode er av orden 1, Heuns metode av orden 2.

Oppgave 6

a) Gitt en funksjon $f(t)$. Finn et uttrykk for polynomet av lavest mulig grad som interpolerer funksjonen i nodene $t_0 = -1/3$ og $t_1 = 1$.

Bruk resultatet til å finne en kvadraturformel $Q[-1, 1] = w_0 f(t_0) + w_1 f(t_1)$ som en tilnærmelse til integralet $\int_{-1}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t$.

Bestem presisjonsgraden til kvadraturformelen.

b) Overfør kvadraturformelen $Q[-1, 1]$ til et tilfeldig intervall $[a, b]$.

Bruk det til å finne en tilnærmelse til integralet $\int_{1}^{2} x^2 \sin(\pi x/2)\,\mathrm{d}x$.

Oppgave 7 La $u(x, t)$ være utslaget ved tidspunkt t og posisjon x av en vibrerende streng av lengde 4. Den oppfyller bølgeligningen

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 \le x \le 4, \quad t \ge 0,$$

med startverdier

$$u(x, 0) = 3\sin(\pi x) \quad \text{og} \quad u_t(x, 0) = \sin(4\pi x), \quad 0 \le x \le 4,$$

og grensebetingelser

$$u(0, t) = u(4, t) = 0, \quad t \ge 0.$$

a) Finn alle løsninger av bølgeligningen på formen $u(x,t) = F(x)G(t)$ som oppfyller grensebetingelsene.

b) Finn løsningen som også oppfyller startbetingelsene.

c) Sett opp et numerisk differanseskjema for ligningen, etter følgende retningslinjer:

Bruk steglengder Δt og Δx i henholdsvis $t-$ og $x-$retningen, der $\Delta x = 4/M$, og M er antall intervaller i $x-$retningen. Gitterpunktene er da gitt ved $t_n = n\Delta t$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ og $x_i = i\Delta x$, $i = 0, 1, \ldots, M$. La $U_i^n \approx u(x_i, t_n)$ være den numeriske tilnærmelsen i hvert gitterpunkt.

- Sett opp et endelig differanseskjema for ligningen, basert på sentraldifferanser. Skjemaet blir eksplisitt, det vil si at tilnærmelsen U_i^{n+1} kan uttrykkes ved hjelp av de numeriske løsningene i tidspunkt t_n og t_{n-1} for $n \geq 1$.
- Bruk deretter en sentraldifferanse for $u_t(x, 0)$ og ideen med en falsk rand for å finne et skjema for å beregne U_i^1, $i = 1, \ldots, M-1$.
- La $\Delta x = 0.1$ og $\Delta t = 0.1$ og bruk disse skjemaene til å beregne $U_1^2 \approx u(0.1, 0.2)$.

Fourier Transform

$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega x} \, \mathrm{d}\omega$	$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} \, \mathrm{d}x$
$f * g(x)$	$\sqrt{2\pi}\hat{f}(\omega)\hat{g}(\omega)$
$f'(x)$	$i\omega \hat{f}(\omega)$
e^{-ax^2}	$\frac{1}{\sqrt{2a}} e^{-\omega^2/4a}$
$e^{-a\lvert x\rvert}$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a}{\omega^2 + a^2}$
$\frac{1}{x^2 + a^2}$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-a\lvert\omega\rvert}}{a}$
$f(x) = 1$ for $\lvert x\rvert < a$, 0 otherwise	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin \omega a}{\omega}$

Laplace Transform

$f(t)$	$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) \, \mathrm{d}t$
$f'(t)$	$sF(s) - f(0)$
$tf(t)$	$-F'(s)$
$e^{at} f(t)$	$F(s-a)$
$\cos(\omega t)$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
$f(t-a)u(t-a)$	$e^{-sa} F(s)$
$\delta(t-a)$	e^{-as}
$f * g(t)$	$F(s)G(s)$

Numerics

- Newton's method: $x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$.
- Newton's method for system of equations: $\vec{x}_{k+1} = \vec{x}_k - JF(\vec{x}_k)^{-1}F(\vec{x}_k)$, with $JF = (\partial_j f_i)$.
- Lagrange interpolation: $p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{l_k(x)}{l_k(x_k)} f_k$, with $l_k(x) = \prod_{j\neq k}(x - x_j)$.
- Interpolation error: $\epsilon_n(x) = \prod_{k=0}^{n}(x - x_k)\frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!}$.
- Chebyshev points: $x_k = \cos\left(\frac{2k+1}{2n+2}\pi\right)$, $0 \leq k \leq n$.
- Newton's divided difference: $f(x) \approx f_0 + (x - x_0)f[x_0, x_1]+$ $(x-x_0)(x-x_1)f[x_0, x_1, x_2] + \cdots + (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})f[x_0, \ldots, x_n]$, with $f[x_0, \ldots, x_k] = \frac{f[x_1,\ldots x_k] - f[x_0,\ldots,x_{k-1}]}{x_k - x_0}$.
- Trapezoid rule: $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx h\left[\frac{1}{2}f(a) + f_1 + f_2 + \cdots + f_{n-1} + \frac{1}{2}f(b)\right]$.
  Error of the trapezoid rule: $|\epsilon| \leq \frac{b-a}{12}h^2 \max_{x\in[a,b]} |f''(x)|$.
- Simpson rule: $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{h}{3}\left[f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + \cdots + 2f_{n-2} + 4f_{n-1} + f_n\right]$.
  Error of the Simpson rule: $|\epsilon| \leq \frac{b-a}{180}h^4 \max_{x\in[a,b]} |f^{(4)}(x)|$.
- Gauss–Seidel iteration: $\mathbf{x}^{(m+1)} = \mathbf{b} - \mathbf{L}\mathbf{x}^{(m+1)} - \mathbf{U}\mathbf{x}^{(m)}$, with $\mathbf{A} = \mathbf{I} + \mathbf{L} + \mathbf{U}$.
- Jacobi iteration: $\mathbf{x}^{(m+1)} = \mathbf{b} + (\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{x}^{(m)}$.
- Euler method: $\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + h\mathbf{f}(x_n, \mathbf{y}_n)$.
- Improved Euler (Heun's) method: $\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + \frac{1}{2}h[\mathbf{f}(x_n, \mathbf{y}_n) + \mathbf{f}(x_n + h, \mathbf{y}^*_{n+1})]$, where $\mathbf{y}^*_{n+1} = \mathbf{y}_n + h\mathbf{f}(x_n, \mathbf{y}_n)$.
- Classical Runge–Kutta method: $\mathbf{k}_1 = h\mathbf{f}(x_n, \mathbf{y}_n)$,
  $\mathbf{k}_2 = h\mathbf{f}(x_n + h/2, \mathbf{y}_n + \mathbf{k}_1/2)$, $\mathbf{k}_3 = h\mathbf{f}(x_n + h/2, \mathbf{y}_n + \mathbf{k}_2/2)$,
  $\mathbf{k}_4 = h\mathbf{f}(x_n + h, \mathbf{y}_n + \mathbf{k}_3)$, $\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + \frac{1}{6}\mathbf{k}_1 + \frac{1}{3}\mathbf{k}_2 + \frac{1}{3}\mathbf{k}_3 + \frac{1}{6}\mathbf{k}_4$.
- Backward Euler method: $\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + h\mathbf{f}(x_{n+1}, \mathbf{y}_{n+1})$.
- Finite differences: $\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) \approx \frac{u(x+h,y) - u(x-h,y)}{2h}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) \approx \frac{u(x+h,y) - 2u(x,y) + u(x-h,y)}{h^2}$.
- Crank–Nicolson method for the heat equation: $r = \frac{k}{h^2}$,
  $(2 + 2r)u_{i,j+1} - r(u_{i+1,j+1} + u_{i-1,j+1}) = (2 - 2r)u_{ij} + r(u_{i+1,j} + u_{i-1,j})$.