NTNU

Kunnskap for en bedre verden

Institutt for matematiske fag

Eksamensoppgave i **TMA4123/TMA4125 Matematikk 4M/4N**

Faglig kontakt under eksamen: Dag Wessel-Berg

Tlf: 924 48 828

Eksamensdato: 1. juni 2016

Eksamenstid (fra–til): 09:00–13:00

Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler: Kode C: Bestemt, enkel kalkulator tillatt. Rottmann: Matematisk Formelsamling

Annen informasjon:
Alle svar skal begrunnes og det skal komme klart fram hvordan svarene er oppnådd.

Målform/språk: bokmål

Antall sider: 3

Antall sider vedlegg: 2

Kontrollert av:

Dato Sign

Oppgave 1 Utfør én iterasjon med Gauss–Seidels metode på ligningssystemet

$$\begin{aligned} 4x - y + z &= 1 \\ x + 3y + z &= 2 \\ 2x + y + 6z &= 3 \end{aligned}$$

med startverdier $x_0 = 1, y_0 = 1, z_0 = 0$.

Oppgave 2 Tredjegradsligningen

$$x^3 + x - 1 = 0$$

har en rot i nærheten av $x = 0.7$. La

$$g_1(x) = 1 - x^3, \quad g_2(x) = \frac{1}{x^2+1}, \quad g_3(x) = (1-x)^{\frac{1}{3}}.$$

Sett $x_0 = 0.7$. Hvilket av de tre eksemplene

$$x_{n+1} = g_1(x_n), \quad x_{n+1} = g_2(x_n), \quad x_{n+1} = g_3(x_n),$$

for fikspunktiterasjon vil gi en følge $x_0, x_1, x_2, \ldots$ som *ikke* konvergerer mot denne rota?

Hvorfor fungerer ikke fikspuntiterasjon for dette eksempelet?

Finn tilnærmet verdi av rota med 2 signifikante siffer ved bruk av en av fikspunkt-itereringene som fungerer.

Oppgave 3 Bruk Runge–Kutta metoden RK4 på problemet

$$y' = x - y, \quad y(0) = 0,$$

med steglengde $h = 0.5$ for å finne en tilnærmet verdi for $y(0.5)$.

Oppgave 4 Bruk Simpsons metode med $2n = 4$ delintervaller for å finne en tilnærmet verdi av integralet

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x}.$$

Hvor mange delintervaller med Simpsons metode trengs det for at absoluttverdien av feilen er mindre enn 10^{-8}?

Oppgave 5

a) La $f(x) = \pi x - x^2$ være definert for $x \in [0, \pi]$. Finn Fourier sinus-rekka til $f(x)$.

Hint: Det kan lønne seg å holde leddene i $f(x)$ samlet under delvis integrasjon.

Skisser grafen til Fourier sinus-rekkka til $f(x)$ mellom $x = -2\pi$ og $x = 2\pi$.

b) La $0 \leq x \leq \pi$, $t \geq 0$. Finn alle ikke-trivielle løsninger på randverdiproblemet

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u(0,t) = u(\pi,t) = 0,$$

som er på formen $u(x,t) = F(x)G(t)$.

c) Igjen er $0 \leq x \leq \pi$, $t \geq 0$. Nå ser vi på det inhomogene randverdiproblemet

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2, \quad u(0,t) = u(\pi,t) = 0.$$

Finn den stasjonære (steady state) løsningen, $u_s(x)$, til dette randverdiproblemet (dvs. løsningen på randverdiproblemet som er uavhengig av tid).

Finn så løsningen på randverdiproblemet som også oppfyller $u(x,0) = 0$.

Hint: Skriv $u(x,t) = u_s(x) + v(x,t)$, og finn randverdiproblemet som $v(x,t)$ oppfyller, samt startverdien $v(x,0)$ for $v(x,t)$.

Oppgave 6 Funksjonen $f(x)$ er definert for alle $x \in \mathbb{R}$ ved

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{for } 0 \leq x \leq 2, \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

Regn ut den Fouriertransformerte, $\hat{f}(\omega)$, til $f(x)$.

Vis at Fourierintegralet

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega x} \, d\omega$$

kan skrives som

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin \omega(2-x) + \sin \omega x}{\omega} \, d\omega,$$

og bruk dette til å finne verdien av integralet

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin \omega}{\omega} \, d\omega.$$

Oppgave 7 Kun for TMA4125 Matematikk 4N

a) Bruk Laplacetransformasjon for å finne funksjonen $y(t)$ som oppfyller startverdiproblemet

$$y'' + 2y' + y = u(t-1), \quad y(0) = y'(0) = 0,$$

der $u(t)$ er enhetssprangfunksjonen (Heaviside-funksjonen).

b) La m og n være naturlige tall (dvs. $m, n = 0, 1, 2, 3, \ldots$).

Bruk Laplacetransformasjone til $f(t) = t^m$ og $g(t) = t^n$ for å vise at

$$(f * g)(t) = \frac{m!n!}{(m+n+1)!} t^{m+n+1},$$

der $(f * g)(t)$ er konvolusjonen av f og g.

Vis at

$$\int_0^1 u^m (1-u)^n \, du = \frac{m!n!}{(m+n+1)!}.$$

Oppgave 8 Kun for TMA4123 Matematikk 4M

a) Skissér (og forklar) det du får når du kjører Matlab-kodesnutten

```
t = linspace(0, 2, 400)';
y = 2*sin(10*2*pi*t)+sin(40*2*pi*t);
Y = fft(y);
plot(abs(Y));
```

Her er `fft` Matlabs implementasjon av fastfouriertransformasjon.

Har skissen noen symmetri? I så fall, hvorfor?

b) Vi ønsker å fjerne de delene av `y` som har frekvens på under 20 Hz. Skriv en Matlab-kodesnutt som gjør dette ved å endre `Y`. Sammenlignet med **a)**, hva får du dersom du kjører `plot(abs(Y))` i Matlab nå? (Dersom du er usikker på hvordan koden bør se ut, forklar hva du ville gjort med ord).

Numerical formulas

- Let $p(x)$ be the polynomial of degree $\leq n$ which coincides with $f(x)$ at points $x_i, i = 0, 1, \ldots, n$. Under the assumption that x and all the nodes x_j lie in the interval $[a, b]$, we have
$$f(x) - p(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \prod_{i=0}^{n} (x - x_i).$$
- Newton's divided difference interpolation formula $p(x)$ of degree $\leq n$:
$$\begin{aligned} p(x) = f[x_0] &+ (x - x_0) f[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1) f[x_0, x_1, x_2] \\ &+ \cdots + (x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_{n-1}) f[x_0, \ldots, x_n] \end{aligned}$$
- Simpson's rule of integration:
$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)\, \mathrm{d}x \approx \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + f_2)$$
Error bounded by $h^4 \frac{b-a}{180} \max_{a \leq x \leq b} |f^{(4)}(x)|$.
- Newton's method for solving a system of nonlinear equations $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ is given by the scheme
$$\begin{aligned} J^{(k)} \cdot \Delta \mathbf{x}^{(k)} &= -\mathbf{f}(\mathbf{x}^{(k)}) \\ \mathbf{x}^{(k+1)} &= \mathbf{x}^{(k)} + \Delta \mathbf{x}^{(k)}. \end{aligned}$$
- Iteration methods for solving systems of linear equations $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ when $A_{i,i} = 1$:
$$\text{Jacobi:} \quad \mathbf{x}^{(m+1)} = \mathbf{b} - (A - I)\mathbf{x}^{(m)}$$
$$\text{Gauss–Seidel:} \quad \mathbf{x}^{(m+1)} = \mathbf{b} - L\mathbf{x}^{(m+1)} - U\mathbf{x}^{(m)}$$
Strict diagonal dominance of A is a sufficient convergence criterion for both.
- Butcher tables for Runge–Kutta methods, where
$$\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + \sum_{i=1}^{s} b_i \mathbf{k}_i, \qquad \mathbf{k}_i = h\mathbf{f}(x_n + c_i h, \mathbf{y}_n + \sum_{j=1}^{s} a_{i,j} \mathbf{k}_j) :$$

(Forward) Euler:
$$\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline & 1 \end{array}$$

Backward Euler:
$$\begin{array}{c|c} 1 & 1 \\ \hline & 1 \end{array}$$

Heun/improved Euler:
$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ \hline & 1/2 & 1/2 \end{array}$$

RK4:
$$\begin{array}{c|cccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline & 1/6 & 1/3 & 1/3 & 1/6 \end{array}$$

- Discrete Fourier transform:
$$\hat{f}_n = \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-2\pi i n k / N}$$

Table of some Laplace transforms

$f(t)$	$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\ \mathrm{d}t$
1	$\frac{1}{s}$
t	$\frac{1}{s^2}$
$t^n \ (n = 0, 1, 2, ...)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$\cosh at$	$\frac{s}{s^2-a^2}$
$\sinh at$	$\frac{a}{s^2-a^2}$
$e^{at} \cos \omega t$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+\omega^2}$
$e^{at} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2}$
$\delta(t-a)$	e^{-as}

Table of some Fourier transforms

$f(x)$	$\hat{f}(\omega) = \mathcal{F}\{f(x)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x}\ \mathrm{d}x$
$g(x) = f(ax)$	$\hat{g}(\omega) = \frac{1}{a} \hat{f}\left(\frac{\omega}{a}\right)$
e^{-ax^2}	$\frac{1}{\sqrt{2a}} e^{-\frac{\omega^2}{4a}}$
$e^{-a\lvert x\rvert}$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a}{\omega^2+a^2}$
$u(x) - u(x-a)$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{\sin a\omega}{\omega} - i\frac{1-\cos a\omega}{\omega}\right)$
$u(x)e^{-x}$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{1+\omega^2} - i\frac{\omega}{1+\omega^2}\right)$