Løsningsforslag Matematikk4N/4M, TMA4123/TMA4125, vår 2016

Oppgave 1

Skriver om ligningssystemet på vanlig måte

$$\begin{aligned} x &= \tfrac{1}{4}y - \tfrac{1}{4}z + \tfrac{1}{4} \\ y &= -\tfrac{1}{3}x - \tfrac{1}{3}z + \tfrac{2}{3} \\ z &= -\tfrac{1}{3}x - \tfrac{1}{6}y + \tfrac{1}{2} \end{aligned}$$

Gauss-Seidel blir da

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \tfrac{1}{4}y_n - \tfrac{1}{4}z_n + \tfrac{1}{4} \\ y_{n+1} &= -\tfrac{1}{3}x_{n+1} - \tfrac{1}{3}z_n + \tfrac{2}{3} \\ z_{n+1} &= -\tfrac{1}{3}x_{n+1} - \tfrac{1}{6}y_{n+1} + \tfrac{1}{2} \end{aligned} .$$

Setter vi $x_0 = 1, y_0 = 1, z_0 = 0$ får vi

$$\begin{aligned} x_1 &= \tfrac{1}{4} - 0 + \tfrac{1}{4} = \tfrac{1}{2} \\ y_1 &= -\tfrac{1}{3}\tfrac{1}{2} - 0 + \tfrac{2}{3} = \tfrac{1}{2} \\ z_1 &= -\tfrac{1}{3}\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{6}\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{4} \end{aligned}$$

Dvs. $(x_1, y_1, z_1) = \left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{4}\right)$.

Oppgave 2

Vi har $g_1'(x) = -3x^2, g_2'(x) = -\dfrac{2x}{(1+x^2)^2}, g_3'(x) = -\dfrac{1}{3}(1-x)^{-\frac{2}{3}}$. Dvs.

$$|g_1'(0.7)| = 1.47,\ |g_2'(0.7)| = 0.63,\ |g_3'(0.7)| = 0.74 .$$

Siden $|g'(x)| < 1$ for x nær løsningen er nødvendig for konvergens, må det være fikspunkiterasjonen $x_{n+1} = g_1(x_n)$ som *ikke* gir konvergens.

Bruker vi $g_2(x)$ for iterasjon gir dette

$x_0 = 0.7, x_1 = 0.6711, x_2 = 0.6895, x_3 = 0.6852, x_4 = 0.6805, x_5 = 0.6835, x_6 = 0.6816, x_7 = 0.6828,..$
så med to signifikante siffer er løsningen 0.68 .

Oppgave 3

Vi har

$$y' = x - y = f(x, y),\ y(0) = 0,\ \text{og}\ h = 0.5 .$$

For RK4 er

$k_1 = hf\left(x_0, y_0\right) = 0.5\left(0-0\right) = 0$

$k_2 = hf\left(x_0 + \tfrac{h}{2}, y_0 + \tfrac{1}{2}k_1\right) = 0.5\left(0.25-0\right) = 0.125$

$k_3 = hf\left(x_0 + \tfrac{h}{2}, y_0 + \tfrac{1}{2}k_2\right) = 0.5\left(0.25-0.0625\right) = 0.09375$

$k_4 = hf\left(x_0 + h, y_0 + k_3\right) = 0.5\left(0.5-0.09375\right) = 0.2031$

Altså er

$y\left(0.5\right) \approx y_1 = y_0 + \tfrac{1}{6}\left(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right) = 0.10677$

(Eksakt løsning er $y\left(x\right) = x - 1 + e^{-x}$ som gir $y\left(0.5\right) = 0.106531$)

Oppgave 4

Simpsons metode er for dette problemet har $h = \tfrac{1}{4}$, og

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x} \approx \frac{1}{4}\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1+0} + 4\frac{1}{1+\frac{1}{4}} + 2\frac{1}{1+\frac{1}{2}} + 4\frac{1}{1+\frac{3}{4}} + \frac{1}{1+1}\right) = 0.693254\,.$$

(Eksakt løsning er $\ln 2 \approx 0.693147$.)

La $f\left(x\right) = \dfrac{1}{1+x}$. Da er $f''''\left(x\right) = \dfrac{24}{\left(1+x\right)^5}$. Altså er $M_4 = \max\limits_{x\in[0,1]}\left|f''''\left(x\right)\right| = 24$.

La absoluttverdi til feilen være R . Da er

$$R \le \frac{\left(1-0\right)^5 M_4}{180\left(2n\right)^4}.$$

Dvs. hvis $\dfrac{\left(1-0\right)^5 M_4}{180\left(2n\right)^4} \le 10^{-8}$ er feilen liten nok. Dette gir $\left(2n\right)^4 \ge \dfrac{24}{180}10^8 \Leftrightarrow 2n \ge 60.4$.

Siden vi trenger et like antall delintervall, er $2n = 62$ delintervaller tilstrekkelig for feil mindre en 10^{-8} .

Oppgave 5

a)

Vi har

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\pi x - x^2\right)\sin nx dx = \frac{2}{\pi}\left\{ {}_0^{\pi}\left[-\left(\pi x - x^2\right)\frac{\cos nx}{n}\right] + \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\left(\pi - 2x\right)\cos nx dx \right\} =$$

$$\frac{2}{\pi}\left\{ 0 + \frac{1}{n}\left({}_0^{\pi}\left[\left(\pi - 2x\right)\frac{\sin nx}{n}\right] + \frac{2}{n}\int_0^{\pi}\sin nx dx \right)\right\} = -\frac{4}{\pi n^3}\,{}_0^{\pi}\left[\cos nx\right] = \frac{4}{\pi n^3}\left(1 - \cos n\pi\right) .$$

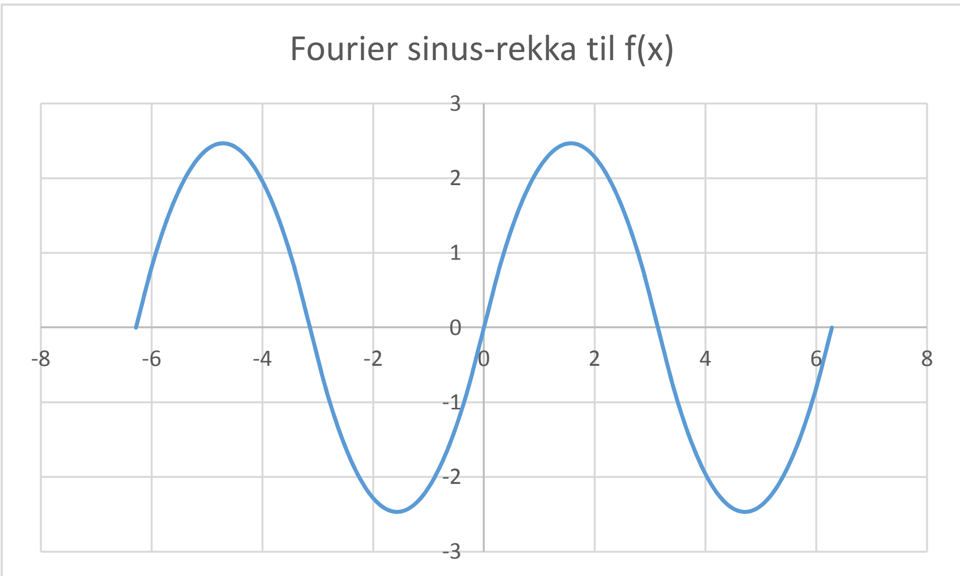
Altså er

$$b_n = \begin{cases} \dfrac{8}{\pi n^3}, \text{for } n \text{ odde} \\ 0, \text{for } n \text{ like} \end{cases}$$

Dette gir Fourier sinus-rekke

$$\frac{8}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\sin\left(2m+1\right)x}{\left(2m+1\right)^3} .$$

Siden den odde periodiske utvidelsen av $f\left(x\right)$, $f_{op}\left(x\right)$, er kontinuerlig, vil Fourier sinus-rekka til $f\left(x\right)$ konvergerer mot $f_{op}\left(x\right)$. Denne $2\pi -$ periodiske funksjonen er plottet for x mellom -2π og 2π i figuren under:



b)

$u\left(x,t\right) = F\left(x\right)G\left(t\right)$ innsatt i differensialligninga gir

$$\frac{G'\left(t\right)}{G\left(t\right)} = \frac{F''\left(x\right)}{F\left(x\right)} = k .$$

Altså er

$$F'' - kF = 0\,,$$

$$G' - kG = 0$$

Randbetingelsene gir $F(0) = F(\pi) = 0$.

Differensialligninga for F har karakteristisk ligning

$r^2 - k = 0$. Drøfter ulike k :

$k = \lambda^2 > 0,\ \lambda > 0$:

Da er $F(x) = C_1 e^{\lambda x} + C_2 e^{-\lambda x}$. Vi har $0 = F(0) = C_1 + C_2 \Leftrightarrow C_2 = -C_1$.

Dette gir $F(x) = C_1\left(e^{\lambda x} - e^{-\lambda x}\right)$. Men $0 = F(\pi) = C_1\left(e^{\lambda \pi} - e^{-\lambda \pi}\right)$ er umulig for $C_1 \neq 0$ og $\lambda > 0$.

$k = 0$: Da er $F(x) = C_1 x + C_2$, og $F(0) = F(\pi) = 0$ er umulig for ikke-triviell $F(x)$.

$k = -\lambda^2 < 0,\ \lambda > 0$: Vi får $F(x) = C_1 \cos \lambda x + C_2 \sin \lambda x$. $F(0) = 0$ gir $C_1 = 0$. Altså er $F(x) = C_2 \sin \lambda x$. For $\lambda > 0$ er $F(\pi) = 0$ oppfylt hvis og bare hvis $\lambda = n\pi,\ n = 1,2,3,\ldots$, dvs. $k_n = -n^2$. Vi får $F_n(x) = \sin nx,\quad n = 1,2,3,..$. Korresponderende $G_n(t)$ oppfyller $G' + n^2 G = 0$, som gir $G_n(t) = A_n e^{-n^2 t}$. Altså er

$$u_n(x,t) = A_n\, \mathrm{e}^{-n^2 t} \sin nx,\ n = 1,2,3,..$$

alle mulige ikke-trivielle løsninger på randverdiproblemet på formen $F(x)G(t)$. Her er A_n konstanter.

c)

Steady state løsninga, $u_s(x)$, innsatt i differensialligninga gir

$$0 = u_s''(x) + 2 \Leftrightarrow u_s(x) = -x^2 + C_1 x + C_2\,.$$

Randverdiene $u_s(0) = u_s(\pi) = 0$ gir $C_1 = \pi,\quad C_0 = 0$. Altså er

$$u_s(x) = \pi x - x^2\,.$$

Skriver

$u(x,t) = u_s(x) + v(x,t)$, og bestemmer randverdiproblemet for $v(x,t)$:

Innsatt i differensialligninga gir dette

$\left(u_s(x) + v(x,t)\right)_t = \left(u_s(x) + v(x,t)\right)_{xx} + 2 \Leftrightarrow\ v_t(x,t) = -2 + v_{xx}(x,t) + 2 \Leftrightarrow v_t = v_{xx}$.

Randbetingelsene: Siden $u_s(0) = u_s(\pi) = 0$ får vi

$$0 = u(0,t) = u_s(0) + v(0,t) = v(0,t) \Leftrightarrow v(0,t) = 0$$

$$0 = u(\pi,t) = u_s(\pi) + v(\pi,t) = v(\pi,t) \Leftrightarrow v(\pi,t) = 0 .$$

Altså oppfyller $v(x,t)$ det homogene randverdiproblemet i **b)**. Det vil si at $v(x,t)$ er gitt som

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-n^2 t} \sin nx \ ,$$

for konstanter A_n, $n = 1,2,3,\ldots$.

Dermed er

$$u(x,t) = u_s(x) + v(x,t) = \pi x - x^2 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-n^2 t} \sin nx$$

(formell) løsning på randverdiproblemet i **c).**

Startverdien $u(x,0) = 0$ gir

$$0 = u(x,0) = u_s(x) + v(x,0) \Leftrightarrow v(x,0) = -u_s(x) .$$

Vi har da

$$v(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin nx = -\left(\pi x - x^2\right) \ .$$

Fra **a)** finner vi da

$$A_n = \begin{cases} \dfrac{-8}{\pi n^3}, \text{for } n \text{ odde} \\ 0, \text{for } n \text{ like} \end{cases} .$$

Altså er løsninga

$$u(x,t) = u_s(x) + v(x,t) = \pi x - x^2 - \frac{8}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{e^{-(2m+1)^2 t} \sin(2m+1)x}{(2m+1)^3} .$$

Oppgave 6

Den Fouriertransformerte til $f(x)$ er

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{2} e^{-i\omega x} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1 - e^{-i2\omega}}{i\omega} .$$

Fourierintegralet er

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1-e^{-i2\omega}}{i\omega}\right)e^{i\omega x}d\omega=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\omega x}-e^{i\omega(x-2)}}{\omega}d\omega=$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos\omega x+i\sin\omega x-\cos\omega(x-2)-i\sin\omega(x-2)}{\omega}d\omega=$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\omega x-\sin\omega(x-2)}{\omega}d\omega\ ,$$

siden

$\frac{\cos\omega x-\cos\omega(x-2)}{\omega}$ er en odde funksjon av ω for fast x . Siden $\frac{\sin\omega x-\sin\omega(x-2)}{\omega}$ er en like funksjon av ω, kan Fourierintegralet skrives som

$$\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{\sin\omega x-\sin\omega(x-2)}{\omega}d\omega=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{\sin\omega x+\sin\omega(2-x)}{\omega}d\omega\,.$$

Siden $f(x)$ er kontinuerlig for $x=1$, er

$$1=f(1)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{\sin\omega+\sin\omega}{\omega}d\omega\Leftrightarrow\int_{0}^{\infty}\frac{\sin\omega}{\omega}d\omega=\frac{\pi}{2}\ .$$

Oppgave 7 , kun for TMA4125, Mat4N

a)

Ta Laplacetransformasjon på begge sider av ligninga:

$$s^2Y(s)+2sY(s)+Y(s)=\frac{e^{-s}}{s}\Leftrightarrow Y(s)=e^{-s}\frac{1}{s(s+1)^2}\,.$$

Vi har $\frac{1}{s(s+1)^2}=\frac{1}{s}-\frac{1}{(s+1)^2}-\frac{1}{s+1}$, altså er $L^{-1}\left(\frac{1}{s(s+1)^2}\right)=1-te^{-t}-e^{-t}$. Dvs.

$$y(t)=L^{-1}\left(e^{-s}\frac{1}{s(s+1)^2}\right)=u(t-1)\left(1-(t-1)e^{-(t-1)}-e^{-(t-1)}\right).$$

b)

Vi har

$$L\left(t^m*t^n\right)=L\left(t^m\right)L\left(t^n\right)=\frac{m!}{s^{m+1}}\frac{n!}{s^{n+1}}=\frac{m!n!}{s^{m+n+2}}=$$

$$\frac{m!n!}{(m+n+1)!}\left(\frac{(m+n+1)!}{s^{(m+n+1)+1}}\right)=\frac{m!n!}{(m+n+1)!}L\left(t^{m+n+1}\right)=L\left(\frac{m!n!}{(m+n+1)!}t^{m+n+1}\right).$$

Altså er

$$t^m * t^n = \frac{m!n!}{(m+n+1)!}t^{m+n+1},$$

siden venstre og høyre side har samme Laplacetransformert.

Spesielt for $t=1$ gir dette

$$\int_0^1 u^m (1-u)^n \, du = \frac{m!n!}{(m+n+1)!}1^{m+n+1} = \frac{m!n!}{(m+n+1)!}.$$

Oppgave 8a) (Kun for TMA4123)

Det koden gjør er å diskret fouriertransformere $\mathbf{y}$ som er samplet på 400 punkter (like langt fra hverandre) i intervallet $[0, 2]$. Deretter plotter den absoluttverdien av den diskret fouriertransformerte, $|\mathbf{Y}|$, som viser oss frekvensspekteret til $\mathbf{y}$. Når vi kjører koden får vi Figur 1.

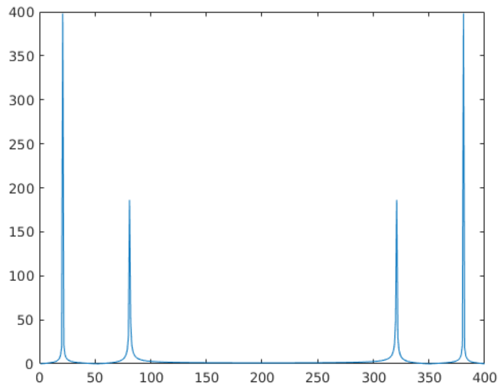


Figure 1: Frekvensspekteret til $\mathbf{y}$, $|\mathbf{Y}|$.

Forklaring av figur: Funksjonen $y(t) = 2\sin(10*2*\pi*t)+\sin(40*2*\pi*t)$ er en lineærkombinasjon av to sinusbølger med hver sin frekvens og amplitude. Den første har en amplitude på 2 og en frekvens vi kan lese rett av på 10Hz, og den andre en amplitude på 1 og en frekvens på 40Hz. Vi forventer da at $|Y|$ vil ha topper ved 10Hz og 40Hz, hvor toppen ved 10Hz vil være høyere. En frekvens svarer til n/T Hz, $n = 0, \dots, N-1$, hvor T er perioden, n er plasseringen i figuren og $N = 400$ er samplingspunktene. Vi har $T = 2$ slik at den høyeste toppen vil være ved $n = 10T = 20$ og den laveste ved $n = 40T = 80$, som i Figur 1.

Symmetrien som oppstår til høyre i figuren skyldes at vi for DFT har

$$|\hat{\mathbf{f}}_{N-n}| = |\hat{\mathbf{f}}_n|.$$

Derfor får vi også en høy topp ved $N - n = 400 - 20 = 380$ og en lavere ved $N - n = 400 - 80 = 320$.

Ekstra: Symmetrien kan man vise generelt på følgende måte. (Beviset er ikke nødvendig for et fullverdig svar på denne oppgaven.) La $\mathbf{f}$ ha lengde N. Da får vi

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{f}}_{N-n} &= \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-2\pi i(N-n)k/N} = \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-2\pi i Nk/N} e^{2\pi i nk/N} = \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-2\pi i k} e^{2\pi i nk/N} \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{2\pi i nk/N},\end{aligned}$$

hvor den siste likheten følger av at $e^{2\pi ik} = 1$ når k er et heltall. Sammenligner vi med

$$\hat{\mathbf{f}}_n = \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-2\pi ink/N},$$

ser vi at

$$\overline{\hat{\mathbf{f}}_{N-n}} = \hat{\mathbf{f}}_n,$$

som gir $|\hat{\mathbf{f}}_{N-n}| = |\hat{\mathbf{f}}_n|$.

Oppgave 8b) (Kun for TMA4123)

20Hz tilsvarer $n = 20T = 40$. Vi ønsker å kvitte oss med alle frekvenser under 20Hz ved å endre $\mathbf{Y}$. Det gjør vi ved å sette alle elementer i Y fra $n = 0$ til $n = 39$ til 0. På grunn av symmetrien nevnt i forrige oppgave må vi også huske å sette alle elementer fra $N - n = 400 - 39 = 361$ til 400 til 0. Dette gir oss følgende kode (vektorer i matlab starter på 1):

```
Y(1:40)=0;
Y(361:400)=0;
```

Kjører vi `plot(abs(Y))` på nytt nå får vi Figur 2, og vi kan se at alt under 20Hz er borte.

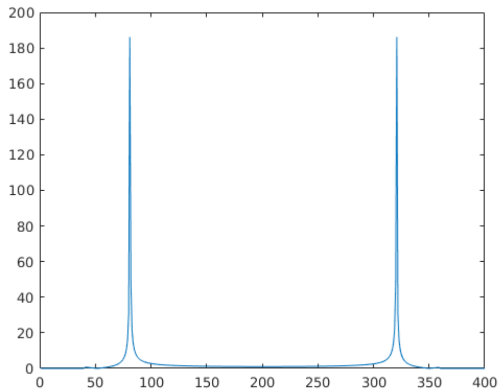


Figure 2: Frekvensspekteret til $\mathbf{y}$ etter endring av $\mathbf{Y}$