Separasjon av variable

Løsningsmetode som fungerer på noen få, **men viktige** PDEer:

- Se etter løsning på formen

$$u(x,t) = F(x)G(t)$$

- Sett dette inn i PDEen, *håp* at dette gir F og G som løsninger av ODEer, og at ODEene kan løses relativt enkelt.

Eksempel som illustrerer metoden

Bølgeligningen

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} \tag{1}$$

Randbetingelser: $u(0,t) = 0$, $u(L,t) = 0$.
Initialbetingelser: $u(x,0) = f(x)$, $u_t(x,0) = g(x)$.

Steg 1: Anta (1) har løsninger på formen

$$u(x,t) = F(x)G(t) \tag{2}$$

Steg 2: Substituer (2) inn i PDEen (1) og separer

$$\frac{F''(x)}{F(x)} = \frac{1}{c^2}\frac{G''(t)}{G(t)} \tag{3}$$

Eksempel forts.

Steg 3: Merk at venstresiden av (3) er en funksjon kun i x mens høyresiden er en funksjon kun i t. Dermed må de være lik en konstant k (separasjonskonstant).

Dette gir to ODEer:

$$F''(x) = kF(x) \tag{4}$$

$$G''(t) = c^2 kG(t) \tag{5}$$

Steg 4: Løs (4) sammen med randbetingelsene fra PDEen, som kan skrives

$$F(0) = 0, \quad F(L) = 0.$$

Eksempel forts.

Steg 3: Merk at venstresiden av (3) er en funksjon kun i x mens høyresiden er en funksjon kun i t. Dermed må de være lik en konstant k (separasjonskonstant).

Dette gir to ODEer:

$$F''(x) = kF(x) \tag{4}$$

$$G''(t) = c^2 kG(t) \tag{5}$$

Steg 4: Løs (4) sammen med randbetingelsene fra PDEen, som kan skrives

$$F(0) = 0, \quad F(L) = 0.$$

Løsningene av (4) avhenger av røtten til et karakteristisk polynom. Viser seg at kun $k < 0$ gir løsninger. Skriv $k = -p^2$. Får

$$p = \frac{n\pi}{L}, \quad F_n(x) = \sin\frac{n\pi x}{L}.$$

Eksempel forts.

Steg 5: Sett verdiene av k inn i ODE (5):

$$G''(t) = c^2 k G(t)$$

og løs denne. Får

$$G_n(t) = B_n \cos \lambda_n t + B_n^* \sin \lambda_n t, \quad \text{der } \lambda_n = \frac{cn\pi}{L}$$

Steg 6: Dette gir løsninger av PDE + randbetingelsene:

$$u_n(x,t) = [B_n \cos \lambda_n t + B_n^* \sin \lambda_n t] \sin \frac{n\pi x}{L}$$

u_n kalles **egenfunksjoner** til PDE; λ_n kalles **egenverdier**.

Eksempel forts.

Steg 7: Bruk initialbetingelsene. For å finne løsning som også tilfredstiller initialbetingelsene, bruk superposisjon til å danne løsningen:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} [B_n \cos \lambda_n t + B_n^* \sin \lambda_n t] \sin \frac{n\pi x}{L}$$

Initialbetingelser:

$$f(x) = u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{n\pi x}{L}$$

$$g(x) = u_t(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n^* \lambda_n \sin \frac{n\pi x}{L}$$

Dette er hhv. fourierrekken til f og g, så B_n og B_n^* er

$$B_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L}$$

$$B_n^* = \frac{2}{\lambda_n L} \int_0^L g(x) \sin \frac{n\pi x}{L}$$

Eksempel forts.

Steg 8: Løsningen som tilfredstiller PDEen, randbetingelsene og initialbetingelsene er altså:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[B_n \cos \lambda_n t + B_n^* \sin \lambda_n t\right] \sin \frac{n\pi x}{L},$$

for $0 < x < L$, der

$$B_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L}$$

$$B_n^* = \frac{2}{\lambda_n L} \int_0^L g(x) \sin \frac{n\pi x}{L}$$

NB: Husk **metoden** ikke resultatet