Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Øving 1

Til denne oppgaven hører det med et MATLAB-script, `fourierrekker.m`, som plotter delsummene $S_N(x)$ til fourierrekken til en periodisk, rektangulær bølge (se eksempel 1, seksjon 11.1 i Kreyszig). I noen av oppgavene under vil du bli bedt om å endre dette programmet slik at du kan plotte delsummene til andre fourierrekker.

Disse oppgavene er frivillige, skal ikke leveres inn, og vil ikke bli veiledet, men de er allikevel sterkt anbefalt. Ikke minst fordi bruken av `fourierrekker.m` kan gi en indikasjon på om du har regnet rett: Er koeffisientene riktige skal rekken konvergere mot $f(x)$.

$\boxed{1}$ La n og m være heltall. Vis at

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx \,\mathrm{dx} = \pi, \quad \text{for alle n}$$
$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx \,\mathrm{dx} = 0, \quad \text{for alle } n \neq m$$
$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx \,\mathrm{dx} = 0, \quad \text{for alle } n \neq m$$

$\boxed{2}$ Bestem fundamentalperiodene til funksjonene $f_1(x) = \cos(2x)$, $f_2(x) = 2\sin(4x+2)$, $f_3(x) = \cos\left(\frac{2\pi x}{k}\right)$, $f_4(x) = \sin(x)\cos(x)$, og $f_5(x) = |\sin x|$.

$\boxed{3}$ Skisser de 2-periodiske ($p = 2$) funksjonene som for $-1 \leq x < 1$ er gitt ved

$$f(x) = 1 - |x|$$
$$g(x) = \begin{cases} -2x, & -1 \leq x < 0 \\ x^2, & 0 \leq x < 1 \end{cases} .$$

$\boxed{4}$ **a)** Beregn fourierrekken til den 2π-periodiske funksjonen $f(x)$ definert ved

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq x < 0 \\ x, & 0 \leq x < \pi. \end{cases}$$

Skisser $f(x)$ og delsummen $S_3(x)$. Angi (uten regning) summen av fourierrekken for $x = -\pi/4$, 0, $\pi/4$, og π.

b) Frivillig: Gjør de nødvendige endringene i `fourierrekker.m` slik at du kan plotte $S_N(x)$ opp til f.eks. $N = 100$. Vil $S_N(x)$ konvergere mot $f(x)$? Legg merke til Gibbseffekten (raske oscillasjoner rundt diskontinuiteten).

5 **a)** Vis at fourierrekken til den 2-periodiske ($p = 2$) funksjonen $f(x)$ som for $-1 < x < 1$ er gitt ved $f(x) = x^2$ kan skrives

$$f(x) = \frac{1}{3} - \frac{4}{\pi^2}\left(\cos \pi x - \frac{1}{4}\cos 2\pi x + \frac{1}{9}\cos 3\pi x - \frac{1}{16}\cos 4\pi x + \cdots\right).$$

b) Frivillig: Gjør de nødvendige endringene i `fourierrekker.m`, og demonstrer at rekken konvergerer mot $f(x)$.

c) Vis at

$$1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \cdots = \frac{\pi^2}{12}.$$

6 La $f(x)$ være en *jamn* og $g(x)$ en *odde* 2π-periodisk funksjon som faller sammen på intervallet $(0, \pi)$:

$$f(x) = g(x) = x, \quad \text{for } 0 < x < \pi.$$

Skisser grafene til f og g på intervallet $[-3\pi, 3\pi]$, og finn fourierrekken til funksjonen g.

Noen nyttige integraler For $n = 1, 2, 3, \ldots$

$$\int_0^\pi x \cos nx \,\mathrm{dx} = \frac{(-1)^n - 1}{n^2}$$
$$\int_0^\pi x \sin nx \,\mathrm{dx} = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{n}$$
$$\int_{-\pi}^\pi x^2 \cos nx \,\mathrm{dx} = (-1)^n \frac{4\pi}{n^2}.$$