TMA4123/TMA4125 – Matematikk 4M/4N

Uke 4

24.01.2013

Sist uke: Fourierrekker

Dersom en 2π-periodisk funksjon kan skrives som en trigonometrisk rekke

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

Sist uke: Fourierrekker

Dersom en 2π-periodisk funksjon kan skrives som en trigonometrisk rekke

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

så må

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{dx} \\
a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx\,\mathrm{dx} \\
b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx\,\mathrm{dx}\,.
\end{aligned}$$

Sist uke: Fourierrekker

Dersom en 2π-periodisk funksjon kan skrives som en trigonometrisk rekke

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

så må

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, \mathrm{dx} \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, \mathrm{dx} \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, \mathrm{dx} \, . \end{aligned}$$

Merk: Fourierrekken til f er altså *unik* blant trigonometriske rekker

Sist uke: Konvergens av fourierrekker

Snudd på hodet: Anta $f(x)$ er 2π-periodisk. Dersom a_0, a_n, b_n er gitt ved

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{dx}$$
$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{dx}$$
$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{dx},$$

kan vi da skrive

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

?

Sist uke: Konvergens av fourierrekker

JA dersom f

- er 2π-periodisk
- er stykkevis kontinuerlig på $[-\pi, \pi]$
- har høyre- og venstrederiverte i hvert punkt

Sist uke: Konvergens av fourierrekker

JA dersom f

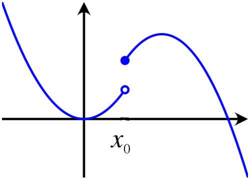
- **er 2π-periodisk**
- er stykkevis kontinuerlig på $[-\pi, \pi]$
- har høyre- og venstrederiverte i hvert punkt

$$f(x + 2\pi) = f(x)$$

Sist uke: Konvergens av fourierrekker

JA dersom f

- er 2π-periodisk
- **er stykkevis kontinuerlig på** $[-\pi, \pi]$
- har høyre- og venstrederiverte i hvert punkt

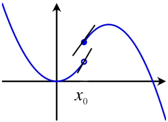


Sist uke: Konvergens av fourierrekker

JA dersom f

- er 2π-periodisk
- er stykkevis kontinuerlig på $[-\pi, \pi]$
- **har høyre- og venstrederiverte i hvert punkt**

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$
$$\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$



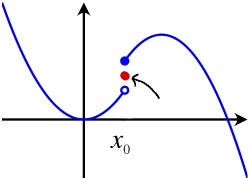
Sist uke: Konvergens av fourierrekker

JA dersom f

- er 2π-periodisk
- er stykkevis kontinuerlig på $[-\pi, \pi]$
- har høyre- og venstrederiverte i hvert punkt

I tillegg: i punkt $x_0 \in [-\pi, \pi]$ der f er diskontinuerlig vil rekken konvergere til gjennomsnittet av fs verdi til høyre og venstre for diskontinuiteten

$$\frac{1}{2}\left[\lim_{x \to x_0^-} f(x) + \lim_{x \to x_0^+} f(x)\right]$$



.

Denne uken

(i) Hva med funksjoner med andre perioder?
(ii) Hva med ikke-periodiske funksjoner?
(iii) Egenskaper til $f \rightsquigarrow$ egenskaper til fourierrekken
(iv) Fourierrekker på kompleks form
(v) Approksimasjon med fourierrekker