Fakta om fouriertransformasjonen*

TMA4123/TMA4125, V2013

Notasjon

- **Fouriertransformasjonen** til funksjonen f er

$$\mathcal{F}[f](\omega) = \hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} \,\mathrm{dx}$$

- Den **inverse fouriertransformasjonen** er

$$\mathcal{F}^{-1}[g](x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(\omega) e^{i\omega x} \,\mathrm{d}\,\omega$$

- Det viser seg at disse er inverse, $f = \mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[f]]$, så

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega x} \,\mathrm{d}\,\omega$$

og

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(v) e^{i\omega(x-v)} \,\mathrm{dv}\,\mathrm{d}\,\omega. \tag{1}$$

Formel (1) kalles **fourierintegralet** til f.

Noen egenskaper

1. Vi får at

$$\hat{f}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \,\mathrm{dx}$$
$$f(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) \,\mathrm{d}\,\omega.$$

*Basert på notat av Harald Krogstad. Notatet er kortfattet og er kun ment som en oversikt. For flere detaljer, se Kreyszig eller andre bøker om fouriertransformasjonen.

2. **Linearitet.** Fouriertransformasjonen og dens inverse er lineære operatorer:

$$\mathcal{F}[af + bg] = a\,\mathcal{F}[f] + b\,\mathcal{F}[g]$$
$$\mathcal{F}^{-1}[af + bg] = a\,\mathcal{F}^{-1}[f] + b\,\mathcal{F}^{-1}[g]$$

der a og b er vilkårlige konstanter

3. **FT til FT.** Hvis $g(x) = \mathcal{F}[f](x)$, $-\infty < x < \infty$, så er

$$\mathcal{F}[g](\omega) = f(-\omega).$$

4. **Translasjon.** Fouriertransformasjonen til en translasjon er

$$\mathcal{F}[f(x - x_0)](\omega) = e^{-i\omega x_0}\,\mathcal{F}[f](\omega).$$

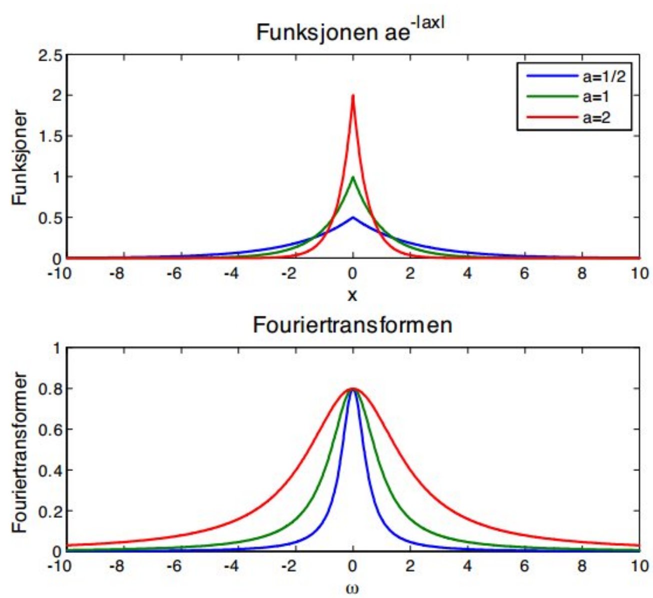
Hvis $g(x) = e^{i\omega_0 x} f(x)$ så er

$$\mathcal{F}[g](\omega) = \mathcal{F}[f](\omega - \omega_0).$$

5. **Strekking og komprimering.** Fouriertransformasjonen til en reskalering er

$$\mathcal{F}[f(ax)](\omega) = \frac{1}{a}\,\mathcal{F}[f]\left(\frac{\omega}{a}\right).$$

Når funksjonen strekkes ut så trykkes fouriertransformasjonen sammen, og omvendt. Se figur.



6. **Derivasjonsregler.** Anta $f(x) \to 0$ når $|x| \to \infty$.

   (a) Den fouriertransformerte til en $n$te-derivert er

   $$\mathcal{F}[f^{(n)}(x)](\omega) = (i\omega)^n \, \mathcal{F}[f](\omega).$$

   (b) Den inverse fouriertransformasjonen til en $n$te-derivert er

   $$\mathcal{F}^{-1}[f^{(n)}(\omega)](x) = (-ix)^n \, \mathcal{F}^{-1}[f](x).$$

7. **Jamne og odde funksjoner.**

   $$f \text{ jamn} \Longleftrightarrow \hat{f} \text{ jamn} \qquad f \text{ odde} \Longleftrightarrow \hat{f} \text{ odde}$$

   Dersom f er en jamn funksjon kan vi bruke eulers formel til å forenkle formlene for fouriertransformasjonen og dens invers:

   $$\begin{aligned} \hat{f}(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(x) \cos \omega x \, \mathrm{dx} \\ f(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(x) e^{i\omega x} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \hat{f}(x) \cos \omega x \, \mathrm{dx} \end{aligned} \tag{2}$$

   Dersom f er en odde funksjon vil

   $$\begin{aligned} \hat{f}(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} = -i\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(x) \sin \omega x \, \mathrm{dx} \\ f(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(x) e^{i\omega x} = i\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \hat{f}(x) \sin \omega x \, \mathrm{dx} \end{aligned} \tag{3}$$

   Boken kaller integralene i (2) for henholdsvis **fourier cosinus-transformasjonen** $\hat{f}_c$ og den **inverse fourier cosinus-transformasjonen**. Integralene

   $$\begin{aligned} &\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(x) \sin \omega x \, \mathrm{dx} \\ &\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \hat{f}(x) \sin \omega x \, \mathrm{dx} \end{aligned}$$

   i (3) kalles henholdsvis **fourier sinus-transformasjonen** $\hat{f}_s$ og den **inverse fourier sinus-transformasjonen**.

   Merk at fouriertransformasjonen til en generell f kan skrives som

   $$\hat{f}(\omega) = \hat{f}_c(\omega) - i\hat{f}_s(\omega).$$

Fouriertransformasjonen og konvolusjon

Definisjon. Konvolusjonen av f og g er definert ved

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(p)g(x-p)\,\mathrm{dp}\,.$$

Merk: dette er ekvivalent med

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-p)g(p)\,\mathrm{dp}\,.$$

Vi har

$$\mathcal{F}[f * g](\omega) = \sqrt{2\pi}\hat{f} \cdot \hat{g}$$
$$\mathcal{F}^{-1}[\hat{f} \cdot \hat{g}] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} f * g.$$

Får dermed

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)\hat{g}(\omega)e^{i\omega x}\,\mathrm{d}\,\omega.$$

Merk: $f * g = g * f$.

I operasjonen $f \mapsto h * f$ representerer "$h*$" et såkalt *filter*. Et filter er en transformasjon L som sender en funksjon f til $L(f)$. Filteret er *lineært* dersom

$$L(af + bg) = aL(f) + bL(g),$$

og *translasjonsinvariant* (også kalt tidsinvariant) dersom

$$L[f_{x_0}] = (Lf)_{x_0},$$

der f_{x_0} betegner funksjonen $f(x - x_0)$.

Konvolusjonsfilteret $f \mapsto h * f$ er både lineært og translasjonsinvariant:

$$h * (af + gh) = a(h * f) + b(h * g)$$

og

$$(h * f)_{x*0} = h * f_{x_0}.$$

Det viser seg at *alle* lineære og translasjonsinvariante filtre kan representeres ved konvolusjon. Dermed kan en beregne resultatet av filtreringen via fouriertransformasjonen. Dette er en av de aller viktigste anvendelsene av fouriertransformasjonen.

Deltafunksjonen

Deltafunksjonen $\delta(x)$ er en såkalt *generalisert funksjon* (Kreyszig, 10. utgave, ch. 6, s. 226). Det er vanlig å beskrive δ som en "funksjon" som er 0 overalt bortsett fra i $x = 0$ der den er uendelig, og med totalt areal under grafen lik 1:

$$\delta(x) = \begin{cases} \infty, & x = 0 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases} \qquad \text{og} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) = 1,$$

men dette gir ikke en veldefinert funksjon.[1] Tenk på $\delta(x)$ eller, mer generelt $\delta(x-x_0)$, som en "impuls" eller "spike" konsentrert i ett enkelt punkt $x = x_0$.

Den viktigste egenskapen til $\delta(x)$ er

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) f(x) \, \mathrm{dx} = f(0),$$

eller mer generelt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-x_0) f(x) \, \mathrm{dx} = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x_0 - x) f(x) = f(x_0).$$

Fouriertransformasjonen til deltafunksjonen.

$$\hat{\delta}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) e^{-i\omega x} \, \mathrm{dx} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-i\omega 0} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.$$

Fouriertransformasjonen til deltafunksjonen er lik konstanten $1/\sqrt{2\pi}$.

Konvolusjon med deltafunksjonen.

$$(\delta * f)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-p) f(p) \, \mathrm{dp} = f(x),$$

det vil si,

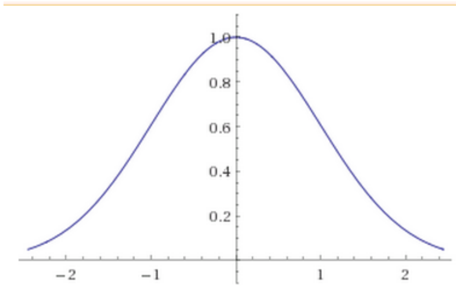
$$\delta * f = f.$$

Konvolusjon med deltafunksjonen gir samme funksjon.

Fouriertransformasjonen av en gaussfunksjon

La $f(x) = e^{-x^2/2}$. Dette gir en såkalte gausskurve (eller "bell curve"). Funksjonen er enormt viktig, både i matematikk og statistikk (normalfordelingen).

Vi skal finne den fouriertransformerte $\hat{f}$ til f.



Siden $f'(x) = -xe^{-x^2/2}$ vil f tilfredstille differensialligningen

$$f'(x) + xf(x) = 0. \tag{4}$$

[1] for en rigorøs definisjon av deltafunksjonen, se f.eks. `http://en.wikipedia.org/wiki/Dirac_delta_function` og referansene gitt der.

Fra derivasjonsregelene for fouriertransformasjonen får vi

$$\begin{aligned} 0 &= \mathcal{F}[f' + xf](\omega) \\ &= \mathcal{F}[f'](\omega) + \mathcal{F}[xf](\omega) \\ &= (i\omega)\mathcal{F}[f](\omega) + i\mathcal{F}[-ixf](\omega), \quad (i^2 = -1) \\ &= (i\omega)\hat{f}(\omega) + i\hat{f}'(\omega), \end{aligned}$$

så

$$\hat{f}'(\omega) + \omega\hat{f}(\omega) = 0.$$

Den fouriertransformerte $\hat{f}$ vil *også tilfredstille (4)*!

Dermed må

$$\hat{f}(\omega) = Cf(\omega) = Ce^{-\omega^2/2},$$

der C er en konstant. Vi ønsker å bestemme C. Har

$$\begin{aligned} 1 = f(0) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)\,\mathrm{d}\,\omega \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} C \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\omega^2/2}\,\mathrm{d}\,\omega \end{aligned}$$

Dette siste integralet er kjent. Faktisk er [2]

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{dx} = \sqrt{\pi},$$

og vi får $C = 1$. Altså:

$$\mathcal{F}\left[e^{-x^2/2}\right] = e^{-\omega^2/2}.$$

Den fouriertransformerte til en gaussfunksjon er en gaussfunksjon.

Parsevals teorem

Akkuratt som for fourierrekker finnes det et *Parsevals teorem* (også kalt *Parsevals identitet* eller *Plancherels formel*) som knytter integralet av $|f(x)|^2$ til fouriertransformasjonen:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2\,\mathrm{dx} = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\omega)|^2\,\mathrm{d}\,\omega.$$

Med andre ord: *energien* $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2\,\mathrm{dx}$ til funksjonen f i *tids-domenet* er lik energien $\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\omega)|^2\,\mathrm{d}\,\omega$ i *frekvens-domenet.*

[2] Se f.eks. `http://mathworld.wolfram.com/GaussianIntegral.html`

Bevis av Parsevals teorem. Viser først at fouriertransformasjonen til $\overline{f(-x)}$ er $\overline{\hat{f}(\omega)}$:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(-x)} e^{-i\omega x} \,\mathrm{dx} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \overline{\int_{-\infty}^{\infty} f(-x) e^{i\omega x} \,\mathrm{dx}} =^{s=x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \overline{\int_{-\infty}^{\infty} f(s) e^{-i\omega s} \,\mathrm{dx}} = \overline{\hat{f}(\omega)}.$$

Lar så $g(x) = \overline{f(-x)}$ og får

$$\begin{aligned} (g * f)(0) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(0-p) f(p) \,\mathrm{dp} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(-(-p))} f(p) \,\mathrm{dp} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(p)} f(p) \,\mathrm{dp} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 \,\mathrm{dx}\,. \end{aligned}$$

Siden $(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) \hat{g}(\omega) e^{i\omega x} \,\mathrm{d}\,\omega$ vil

$$(g * f)(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}(\omega) \hat{f}(\omega) \,\mathrm{d}\,\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\hat{f}(\omega)} \hat{f}(\omega) \,\mathrm{d}\,\omega = \int_{-\infty}^{\infty} |f(\omega)|^2 \,\mathrm{d}\,\omega,$$

som beviser Parsevals teorem.