Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Marius Thaule (952 14 508)
Harald E. Krogstad (41 65 18 17)

EKSAMEN I MATEMATIKK 4M (TMA4123)
Bokmål

Fredag 20. mai 2011
Tid: 09:00 – 13:00 Sensur 10. juni 2011

Hjelpemidler (Kode C): Enkel kalkulator (Hewlett Packard HP30S eller Citizen SR-270X). Rottmann: *Matematisk formelsamling.* Et formelark på en (1) side er heftet ved bak oppgavesettet.

Alle svar skal begrunnes og det skal gå klart fram hvordan svarene er oppnådd.

Oppgave 1 Funksjonen $f(x) = \sin x$, definert på intervallet $[0, \pi]$, skal utvides til en *odde* funksjon, g, og en *like* funksjon, h, begge med periode 2π.

a) Skissér funksjonene g og h på intervallet $[-2\pi, 2\pi]$, og angi, uten å regne, fourierrekken for g.

b) Vis at fourierrekken for h kan skrives

$$\frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^2 - 1}\cos 2kx,$$

og bestem summen av rekkene

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^2 - 1} \text{ og } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)^2 - 1}.$$

(Vink: $\int_0^\pi \sin x \cos nx \mathrm{d}x = -\frac{2}{(n-1)(n+1)},\ n = 2, 4, \cdots; = 0, n = 1, 3, \cdots$)

Oppgave 2 Det oppgis at fouriertransformen til funksjonen $\frac{\sin ax}{x}$ (for $a > 0$) er $\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ hvis $|\omega| < a$, og 0 hvis $a < |\omega|$.

a) Vis at

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}x = \pi,$$

og

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin ax}{x} \cos x \, \mathrm{d}x = \begin{cases} \pi, & a > 1, \\ \pi/2 & a = 1, \\ 0 & a < 1. \end{cases}$$

b) Et filter foretar en konvolusjon med funksjonen

$$h_a(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\sin ax}{x} (a > 0)$$

på alle signaler (funksjoner) $f(x)$ som kommer inn til filteret, og sender resultatet av konvolusjonen, $g = h_a * f$, ut. Forklar hva som har skjedd med fouriertransformen til signalet etter at det har passert filteret.
(Vink: Sjekk fouriertransformen til h_a).

Oppgave 3

a) Finn alle (ikke-trivielle) løsninger av differensialligningen

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \quad 0 \le t, \quad 0 \le x \le L,$$

på formen $G(t) F(x)$, der $G(0) = 1$, og $F(0) = F(L) = 0$.

b) En tynn stav ligger langs x-aksen fra $x = 0$ til $x = L$. Temperaturen i staven, $u(x, t)$, tilfredsstiller samme ligning som i (a). Temperaturen ved $x = 0$ er lik 0, mens temperaturen ved $x = L$ er lik T ($\neq 0$), dvs. $u(0, t) = 0$, $u(L, t) = T$, $0 \le t$.

Angi en enkel løsning for temperaturen i staven som er uavhengig av tiden.

Vi antar nå videre at staven for $t = 0$ har temperatur

$$u(x, 0) = \frac{Tx}{L} + \sin \frac{\pi x}{L} + \frac{1}{3} \sin \frac{3\pi x}{L}.$$

Finn, ved å benytte resultatet i (a) eller en annen måte, temperaturen i staven for $0 \le x \le L$, $0 \le t$.

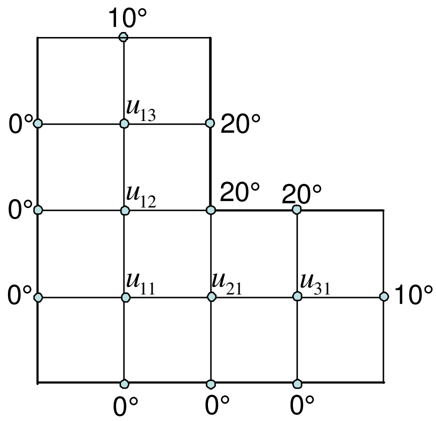
Oppgave 4

a) Finn interpolasjonspolynomet av lavest mulig grad som går gjennom (x, y)-punktene

$$(0, 1), (1, 2), (2, 5).$$

b) Vis hvordan en ved hjelp av polynomet i (a) og et Lagrange interpolasjons-polynom som er 0 i $x = 0, 1, 2$, og 1 i $x = 3$, kan lage et polynom som i tillegg til punktene i (a) også går gjennom punktet $(3, 16)$.

Oppgave 5 Midt inne i en rett, massiv murvegg vil temperaturen være $\frac{T_1+T_2}{2}$, der T_1 er temperaturen på utsiden og T_2 temperaturen på innsiden av veggen. Men hva blir temperaturen midt inne i veggen i et rett hjørne? For å finne ut mer, har vi konstruert testproblemet skissert på figur 1. Temperaturen på alle sidenodene er som angitt, mens den er ukjent i de indre nodene. Hva kan vi si om u_{ij} og u_{ji} for de indre nodene? Bestem, ved å bruke fem-punktsapproksimasjonen for $\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, temperaturene u_{11}, u_{21} og u_{31}.



Figur 1: Numerisk nett for et utsnitt av muren.

Oppgave 6

a) Vi har definert følgende variable i Matlab:

`A`: 2×3 matrise,

`B`: 3×5 matrise,

`b`: 3×1 kolonnevektor,

`c`: 1×3 radvektor.

Angi med Ja/Nei og en kort kommentar hvilke operasjoner som er lovlige i Matlab:

(1) `A*B`, (2) `A.*B`, (3) `B'*A'`, (4) `A*b`, (5) `c*b`, (6) `b*c`, (7) `b.*c'`, (8) `A.^2`, (9) `cos(A)`, (10) `A(2,:)*c`.

b) Forklar Matlab-skriptet og funksjonen som er gitt i figur 2.

```
x   = -4;                               %1
S   = 0;                                %2
for  j = 1:10                           %3
  x0 = x;                               %4
  [g,dg] = fdf(x);                      %5
  x = x0 - g/dg;                        %6
  if abs(x-x0) < 1.0e-10                %7
    S = 1;                              %8
    'Solution:' , x , j                 %9
    break                               %10
  end                                   %11
end                                     %12
if S == 0                               %13
  'No acceptable solution'              %14
end                                     %15

function [f,df] = fdf(x)                %16
f =  2 - 3*x + 2*x^2 + x^3;             %17
df=     -3   + 4*x   + 3*x^2;           %18
```

Figur 2: Matlab-kode.

Formelliste for TMA 4123M og TMA 4125N 20. mai, 2011.

Laplace

$f(t)$	$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,\mathrm{d}t$
$f'(t)$	$sF(s) - f(0)$
$f(t-a)\,u(t-a)$	$e^{-sa}F(s)$
$e^{at}f(t)$	$F(s-a)$
$tf(t)$	$-F'(s)$
$u(t)$	$1/s$
t^n	$n!/s^{n+1}$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
$\cos at$	$\frac{s}{s^2+a^2}$
$\sin at$	$\frac{a}{s^2+a^2}$
$\cosh at$	$\frac{s}{s^2-a^2}$
$\sinh at$	$\frac{a}{s^2-a^2}$

Fourier

$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)\, e^{i\omega x} \mathrm{d}\omega$	$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-i\omega x} \mathrm{d}x$
$f * g(x)$	$\sqrt{2\pi}\hat{f}(\omega)\,\hat{g}(\omega)$
$af(ax)$	$\hat{f}(\omega/a)$
e^{-ax} for $x>0$, 0 ellers	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{a+i\omega}$
$g(x) = \hat{f}(x)$	$\hat{g}(\omega) = f(-\omega)$
e^{-ax^2}	$\frac{1}{\sqrt{2a}} e^{-\omega^2/4a}$
$e^{-a\|x\|}$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a}{\omega^2+a^2}$
$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{1+x^2}$	$e^{-\|\omega\|}$
$f(x) = 1$ for $\|x\| < a$, 0 ellers	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin \omega a}{\omega}$
$\delta(x)$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$

Numerikk

Iterasjon: $x_{n+1} = g(x_n)$. $|g'(s)| < 1 \Longrightarrow$ konvergens rundt s.

Newton: $\mathbf{J}^{(k)}\left(\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)}\right) = -\mathbf{f}\left(\mathbf{x}^{(k)}\right),\ \left\{\mathbf{J}^{(k)}\right\}_{ij} = \partial f_i/\partial x_j \left(\mathbf{x}^{(k)}\right).$

Lagrange int. polynom: $L_k(x) = \frac{(x-x_1)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n)}{(x_k-x_1)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)}$

Trapes: $\int_{x_0}^{x_n} f(x)\,\mathrm{d}x \approx T_h = h\left[\frac{f_0}{2} + f_1 + \cdots + f_{n-1} + \frac{f_n}{2}\right]$

Trapes-ekstrapolasjon: $T_{ex} = 4T_{h/2}/3 - T_h/3$

Simpson: $\int_{x_0}^{x_n} f(x)\,\mathrm{d}x \approx S_h = \frac{h}{3}\left[f_0 + 4f_1 + 2f_2 + \cdots + 4f_{n-1} + f_n\right]$

Jacobi: $\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{b} - (\mathbf{L}+\mathbf{U})\,\mathbf{x}^{(k)},\ \mathbf{A} = \mathbf{I}+\mathbf{L}+\mathbf{U}$

Gauss-Seidel: $\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{b} - \left(\mathbf{L}\mathbf{x}^{(k+1)} + \mathbf{U}\mathbf{x}^{(k)}\right),\ \mathbf{A} = \mathbf{I}+\mathbf{L}+\mathbf{U}$

Heun: $k_1 = hf(x_n, y_n),\ k_2 = hf(x_n+h, y_n+k_1),\ \ y_{n+1} = y_n + (k_1+k_2)/2$

Fempunktformel: $\nabla^2 u_C = (u_V + u_N + u_Ø + u_S - 4u_C)/h^2 \ + \mathcal{O}\left(h^2\right)$