Eksamen i TMA4123/TMA4125 Matematikk 4M/4N

Løsningsforslag
Alexander Lundervold
Mai 2012

Oppgave 1

a) Den Fouriertransformerte til f er

$$\hat{f}(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-iwx} \,\mathrm{dx}$$

Vi får

$$\begin{aligned}
\hat{f}(w) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{-\infty}^{0} e^{ax} e^{-iwx} \,\mathrm{dx} + \int_{0}^{\infty} e^{-ax} e^{-iwx} \,\mathrm{dx} \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{-\infty}^{0} e^{(a-iw)x} \,\mathrm{dx} + \int_{0}^{\infty} e^{-(a+iw)x} \,\mathrm{dx} \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\left[\frac{1}{a-iw} e^{(a-iw)x} \right]_{-\infty}^{0} - \left[\frac{1}{a+iw} e^{-(a+iw)x} \right]_{0}^{\infty} \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{a-iw} + \frac{1}{a+iw} \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{a+iw+a-iw}{a^2+w^2} \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a}{a^2+w^2}.
\end{aligned}$$

b) Fourierintegralet til $f(x) = e^{a|x|}$ er

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(w) e^{iwx}\, \mathrm{dw} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{a}{a^2+w^2} e^{iwx}\, \mathrm{dw} \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{a}{a^2+w^2} \cos wx + i \frac{a}{a^2+w^2} \sin wx\, \mathrm{dw} \\ &= \frac{2a}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos wx}{a^2+w^2}\, \mathrm{dw}, \end{aligned}$$

der den siste likheten følger av at $a/(a^2+w^2)$ og $\cos wx$ er jamne funksjoner, og $\sin wx$ er odde. Vi får dermed at

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos wx}{w^2+a^2}\, \mathrm{dw} = \frac{\pi}{2a} e^{-a|x|}.$$

Oppgave 2 Den komplekse Fourierrekken er

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}, \quad \text{der } c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx}\, \mathrm{dx}\,.$$

For $n \neq 0$ har vi

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} (\pi - x) e^{-inx}\, \mathrm{dx} \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\left[-\frac{\pi}{in} e^{-inx} \right]_0^{\pi} - \int_o^{\pi} x e^{-inx}\, \mathrm{dx} \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\pi}{in} - \frac{\pi}{in} e^{-in\pi} - \int_o^{\pi} x e^{-inx}\, \mathrm{dx} \right). \end{aligned}$$

Det siste integralet kan løses via delvis integrasjon:

$$\begin{aligned} \int_o^{\pi} x e^{-inx}\, \mathrm{dx} &= \left[-\frac{x}{in} e^{-inx} + \frac{1}{n^2} e^{-inx} \right]_0^{\pi} \\ &= -\frac{\pi}{in} e^{-in\pi} + \frac{1}{n^2} e^{-in\pi} - \frac{1}{n^2}. \end{aligned}$$

Dermed får vi

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\pi}{in} - \frac{\pi}{in} e^{-in\pi} + \frac{\pi}{in} e^{-in\pi} - \frac{1}{n^2} e^{-in\pi} + \frac{1}{n^2} \right) \\ &= \frac{1}{2\pi n^2} \left(-i\pi n - e^{-i\pi n} + 1 \right), \end{aligned}$$

der den siste likheten følger av at $1/i = -i$.

I tillegg får vi

$$c_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}(\pi - x)dx = \frac{\pi}{4}.$$

Fourierrekken til f er altså

$$\frac{\pi}{4} + \sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{\infty} \frac{1}{2\pi n^2}\left(-i\pi n - e^{-i\pi n} + 1\right)e^{inx}.$$

Oppgave 3

a) Ved å sette $u(x,t) = F(x)G(t)$ inn i differensialligningen får vi at $F(x)G'(t) = F''(x)G(t)$, slik at

$$\frac{F''(x)}{F(x)} = \frac{G'(t)}{G(t)} = k,$$

der k er en konstant. Dette gir de to ordinære differensialligningene

$$F''(x) - kF(x) = 0 \tag{1}$$
$$G'(t) - kG(t) = 0. \tag{2}$$

Randbetingelsene gir at $F(0) = F(L) = 0$. Vi løser først ODE (1) med disse randbetingelsene. Formen på løsningen er avhengig av om k er positiv, null eller negativ.

<u>$k > 0$:</u> Skriv $k = \mu^2$. Generell løsning av (1) er

$$F(x) = C_1 e^{\mu x} + C_2 e^{-\mu x}.$$

Randbetingelsene gir

$$0 = F(0) = C_1 + C_2, \quad 0 = F(L) = C_1 e^{\mu L} + C_2 e^{-\mu L}.$$

Den første av disse gir at $C_1 = -C_2$, og den andre gir dermed at $C_1 = C_2 = 0$ (siden $e^{\mu L} > e^{-\mu L}$). Vi får altså kun den trivielle løsningen $u(x,t) = 0$.

<u>$k = 0$:</u> ODE (1) blir $F''(x) = 0$ som har generell løsning

$$F(x) = ax + b.$$

Randbetingelsene gir

$$0 = F(0) = b, \quad 0 = F(L) = b,$$

så vi får igjen kun den trivielle løsningen.

<u>$k < 0$:</u> Skriv $k = -\mu^2$. Generell løsning er

$$F(x) = C_1 \cos \mu x + C_2 \sin \mu x.$$

Randbetingelsene gir

$$0 = F(0) = C_1, \quad 0 = F(L) = C_2 \sin \mu L.$$

Dersom $\sin \mu L = 0$ får vi altså ikke-trivielle løsninger. Dvs. $\mu L = n\pi$, eller

$$\mu = \frac{n\pi}{L},$$

gir løsningene

$$F_n(x) = C_2 \sin \frac{n\pi}{L} x, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Vi putter disse verdiene av μ inn i ODE (2) og får

$$G'(t) + \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 G(t) = 0,$$

som har generell løsning

$$G_n(t) = C_n e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Dette gir oss *egenfunksjonene*

$$u_n(x, t) = B_n \sin \frac{n\pi x}{L} e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

(der B_n er konstanten $C_2 C_n$).

b) For å finne løsningene som tilfredstiller initialbetingelsene bruker vi superposisjonsprinsippet til å danne løsningen

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{n\pi x}{L} e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t}$$

av PDE og randbetingelser.

(i) Initialbetingelsen gir

$$-3 \sin \frac{13\pi}{L} x = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{n\pi x}{L},$$

som er (pga entydighet) er Fourierrekken til initialbetingelsen. Vi kan lese av koeffisienten B_n direkte: vi har $B_n = 0$ for alle $n \neq 13$, og $B_{13} = -3$. Løsningen av PDE med randbetingelser og denne initialbetingelsen er altså

$$u(x, t) = -3 \sin \frac{13\pi x}{L} e^{-\left(\frac{13\pi}{L}\right)^2 t}.$$

(ii) Initialbetingelsen gir

$$10 = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{n\pi x}{L},$$

som er Fourier-sinus-rekken til 10. Dermed er

$$\begin{aligned} B_n &= \frac{2}{L}\int_0^L 10 \sin \frac{n\pi}{L} x \, \mathrm{dx} \\ &= -\frac{20}{L}\frac{L}{n\pi}\left[\cos \frac{n\pi}{L} x\right]_0^L \\ &= -\frac{20}{n\pi}(\cos n\pi - 1) \\ &= \frac{20}{n\pi}(1 - (-1)^n). \end{aligned}$$

Løsningen på PDE med randbetingelser og denne initialbetingelsen er altså

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{20}{n\pi}(1 - (-1)^n) \sin \frac{n\pi x}{L} e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t}$$

Oppgave 4

a) Vi har $f(0) = 1$, $f(1) = 1/2$ og $f(2) = 1/5$. Interpolasjonspolynomet (på Lagrange-form) er

$$\begin{aligned} p_2(x) &= f(x_0)\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + f(x_1)\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + f(x_2)\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} \\ &= \frac{(x-1)(x-2)}{(-1)(-2)} + \frac{1}{2}\cdot\frac{x(x-2)}{1\cdot(1-2)} + \frac{1}{5}\cdot\frac{x(x-1)}{2\cdot(2-1)} \\ &= \frac{1}{2}(x-1)(x-2) + \frac{1}{10}x(x-1) - \frac{1}{2}x(x-2) \\ &= \frac{1}{10}(x^2 - 6x + 10). \end{aligned}$$

b) Ved å integrere begge sider av differensialligningen fra 0 til x får vi

$$\begin{aligned} \int_0^x \frac{dy}{dt} dt &= \int_0^x \frac{1}{1+t^2} \, \mathrm{dt} \\ y(x) - y(0) &= \int_0^x \frac{1}{1+t^2} \, \mathrm{dt} \\ y(x) &= 1 + \int_0^x \frac{1}{1+t^2} \, \mathrm{dt}\,. \end{aligned}$$

Fra **a)** vet vi at funksjonen $1/(1+t^2)$ kan tilnærmes med polynomet $p_2(t) = \frac{1}{10}(t^2-6t+10)$. Ved å bruke dette i integralligningen får vi

$$y(x) \approx 1 + \int_0^x \frac{1}{10}(t^2 - 6t + 10)\,\mathrm{d}t = 1 + \frac{1}{30}(x^3 - 9x^2 + 30x).$$

Dette gir $y(5) \approx 8/3 \approx 2.66667$.

Integralet kan løses eksakt og løsningen av differensialligningen blir

$$y(x) = 1 + \tan^{-1}(x).$$

Vi har $y(5) = 1 + \tan^{-1}(5) \approx 2.37340$, så den absolutte feilen i tilnærmingen er $|e| = |2.66667 - 2.37340| = 0.29327$.

Oppgave 5 Heuns metode for systemer $\mathbf{y}' = \mathbf{f}(\mathbf{y})$ er

$$\begin{aligned}\mathbf{k}_1 &= hf(\mathbf{y})\\ \mathbf{k}_2 &= hf(\mathbf{y} + \mathbf{k}_1)\\ \mathbf{y}_{n+1} &= \mathbf{y}_n + \frac{1}{2}(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2).\end{aligned}$$

Med $h = 0.2$, $x_0 = 0$ og $y_o = 4$ får vi for vårt system at

$$\begin{aligned}\mathbf{k}_1 &= 0.2\begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.8 \\ -0.8 \end{pmatrix}\\ \mathbf{k}_2 &= 0.2\begin{pmatrix} -4/5 + (4 - 4/5) \\ -4/5 - (4 - 4/5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.48 \\ -0.8 \end{pmatrix}\\ \mathbf{y}_1 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1.28 \\ -1.6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.64 \\ 3.2 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Oppgave 6 **Kun for TMA4125/Matematikk 4N**

a) Delbrøkoppspalting gir

$$F(s) = \frac{s-3}{(s-1)(s-4)} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{s-1} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{s-4}.$$

Vi vet at

$$\mathcal{L}\left(\frac{1}{s-a}\right) = e^{at},$$

så

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s-3}{(s-1)(s-4)}\right) = \frac{2}{3}e^t + \frac{1}{3}e^{4t}.$$

Videre har vi at

$$\frac{e^{-as}}{s(s-1)(s-4)} = e^{-as} \cdot \frac{1}{s(s-1)(s-4)},$$

så forskyvningsteoremet gir

$$\mathcal{L}^{-1}\left(e^{-as} \cdot \frac{1}{s(s-1)(s-4)}\right) = g(t-a)H(t-a),$$

der g er den inverse Laplacetranformerte til $1/(s(s-1)(s-4))$ og H er Heaviside-funksjonen. Delbrøkoppspalting gir at

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s(s-1)(s-4)}\right) = -\frac{e^t}{3} + \frac{e^{4t}}{12} + \frac{1}{4},$$

så

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{e^{-as}}{s(s-1)(s-4)}\right) = H(t-a)\left(-\frac{e^{t-a}}{3} + \frac{e^{4(t-a)}}{12} + \frac{1}{4}\right)$$

b) Vi bruker Laplacetransformasjonen på begge sider av ligningen, skriver $Y = \mathcal{L}(y)$, og bruker initialbetingelsene. Får

$$\begin{aligned}
s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) - 5[sY(s) - y(0)] + 4Y(s) &= \frac{e^{-s}}{s} - \frac{e^{-2s}}{s}, \\
s^2Y(s) - s - 2 - 5[sY(s) - 1] + 4Y(s) &= \frac{e^{-s}}{s} - \frac{e^{-2s}}{s} \\
(s^2 - 5s + 4)Y(s) &= s - 3 + \frac{e^{-s}}{s} - \frac{e^{-2s}}{s},
\end{aligned}$$

eller

$$Y(s) = \frac{s-3}{(s-4)(s-1)} + \frac{e^{-s}}{s(s-4)(s-1)} - \frac{e^{-2s}}{s(s-4)(s-1)}.$$

Fra **a)** får vi dermed at

$$\begin{aligned}
y(t) &= \frac{2}{3}e^t + \frac{1}{3}e^{4t} + H(t-1)\left(-\frac{e^{t-1}}{3} + \frac{e^{4(t-1)}}{12} + \frac{1}{4}\right) - H(t-2)\left(-\frac{e^{t-2}}{3} + \frac{e^{4(t-2)}}{12} + \frac{1}{4}\right) \\
&= \begin{cases} \frac{2}{3}e^t + \frac{1}{3}e^{4t}, & t \le 1 \\ \frac{2}{3}e^t + \frac{1}{3}e^{4t} - \frac{e^{t-1}}{3} + \frac{e^{4(t-1)}}{12} + \frac{1}{4}, & 1 < t \le 2 \\ \frac{2}{3}e^t + \frac{1}{3}e^{4t} - \frac{e^{t-1}}{3} + \frac{e^{4(t-1)}}{12} + \frac{e^{t-2}}{3} - \frac{e^{4(t-2)}}{12}, & t > 2. \end{cases}
\end{aligned}$$

Oppgave 7 Kun for TMA4123/Matematikk 4M

a) Dette er Gauss-Seidel-iterasjon brukt på det gitte systemet. Legg merke til at vi bruker verdiene av x, y, z, w i beregningene så snart de blir tilgjengelige (i motsetning til f.eks. Jacobi-iterasjon). Første iterasjon gir

$$\begin{aligned}
x &= \frac{16}{7} \approx 2.28571 \\
y &= \frac{17}{8} - \frac{1}{4} \cdot 2.28571 - \frac{3}{8} - \frac{1}{8} \approx 1.05357 \\
z &= \frac{7}{5} + \frac{1}{5} \cdot 2.28571 - \frac{2}{5} \approx 1.45714 \\
w &= \frac{9}{4} - \frac{1}{2} \cdot 1.05357 + \frac{1}{4} \cdot 1.45714 \approx 2.0875.
\end{aligned}$$

b) Matrisen til systemet er

$$\begin{pmatrix} 7 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & 8 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Denne er *diagonaldominant*. Dermed vil Gauss-Seidel konvergere til løsningen av systemet.