Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Erik Lindgren (45475993)
Alexander Lundervold (95931335)

Eksamen i TMA4123/TMA4125 Matematikk 4M/4N

Bokmål
Torsdag 23. mai 2013
Tid: 09:00 – 13:00
Sensur 13. juni 2013

Hjelpemidler (kode C): Enkel kalkulator (HP30S eller Citizen SR-270X/SR-270X College.)
Rottmann: *Matematisk formelsamling.*
Et formelsett på to sider heftet ved oppgavesettet.

Alle svar skal begrunnes, og det skal være med så mye mellomregning at fremgangsmåten fremgår tydelig av besvarelsen.

TMA4123 Matematikk 4M: Alt unntatt Oppgave 6 (Laplacetransformasjonen)
TMA4125 Matematikk 4N: Alt unntatt Oppgave 7 (MATLAB)

Oppgave 1

a) Vis at den Fouriertransformerte til funksjonen

$$f(x) = e^{-a|x|}, \quad -\infty < x < \infty, a > 0$$

er

$$\hat{f}(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a}{a^2 + w^2}$$

ved å bruke definisjonen av den Fouriertransformerte.

b) Bruk Fourierintegralet til funksjonen i **a)** til å beregne integralet

$$\int_0^\infty \frac{\cos wx}{w^2 + a^2} \,\mathrm{dw}\,.$$

Oppgave 2 La f være den 2π-periodiske funksjonen gitt på intervallet $[-\pi, \pi]$ ved

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq x \leq 0 \\ \pi - x, & 0 < x \leq \pi. \end{cases}$$

Finn Fourierrekken til f på *kompleks form.*
NB: Det er ikke nødvendig å forenkle svaret utover å finne løsningen på det aktuelle integralet.

Oppgave 3 Betrakt den partielle differensialligningen

$$u_t = u_{xx}, \qquad 0 \leq x \leq L, \quad t \geq 0 \tag{1}$$

a) Finn alle løsningene av (1) som kan skrives på formen

$$u(x,t) = F(x)G(t)$$

og som tilfredsstiller randbetingelsene

$$u(0,t) = 0, \quad u(L,t) = 0.$$

b) Finn de to løsningene som i tillegg tilfredsstiller henholdsvis

(i) initalbetingelsen $u(x,0) = -3\sin\left(\frac{13\pi x}{L}\right)$, der $0 \leq x \leq L$

(ii) initialbetingelsen $u(x,0) = 10$, der $0 \leq x \leq L$

Oppgave 4

a) Finn andregradspolynomet $p_2(x)$ som interpolerer funksjonen

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

i punktene $x = 0, 1, 2$.

b) Betrakt initialverdiproblemet

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+x^2}, \quad y(0) = 1. \tag{2}$$

Vis at dette kan skrives om til integral-ligningen

$$y(x) = 1 + \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{dt}\,.$$

Bruk resultatet i **a)** til å finne en tilnærmet løsning av (2) i punktet $x = 5$. Finn deretter eksakt løsning på initialverdiproblemet. Hvor stor er den absolutte feilen i tilnærmingen?

Oppgave 5 Betrakt følgende system av 1. ordens ordinære differensialligninger

$$\begin{aligned} x' &= -x + y, \quad x(0) = 0 \\ y' &= -x - y, \quad y(0) = 4. \end{aligned} \tag{3}$$

Bruk *en* iterasjon med Heuns metode (også kalt forbedret Euler) med steglengde $h = 0.2$ til å tilnærme løsningen. Se formelark for beskrivelse av Heuns metode.

Oppgave 6 Kun for TMA4125/Matematikk 4N

a) Finn den inverse Laplacetransformasjonen til funksjonene

$$\frac{s-3}{(s-1)(s-4)}, \quad \frac{e^{-as}}{s(s-1)(s-4)}$$

der a er en positiv konstant.

b) Løs initialverdiproblemet

$$\begin{cases} y''(t) - 5y'(t) + 4y(t) = H(t-1) - H(t-2) \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 2 \end{cases}$$

der H er Heaviside step-funksjonen.

Oppgave 7 Kun for TMA4123/Matematikk 4M
Betrakt systemet

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 7x & - & 2y & + & z & + & 2w & = & 17 \\ 2x & + & 8y & + & 3z & + & w & = & 17 \\ -x & + & & & 5z & + & 2w & = & 7 \\ & & 2y & - & z & + & 4w & = & 9. \end{array}$$

og MATLAB-scriptet

```
x=1;y=1;z=1;w=1;
for k=1:N
    x=(17/7)+(2/7)*y-(1/7)*z-(2/7)*w;
    y=(17/8)-(1/4)*x-(3/8)*z-(1/8)*w;
    z=(7/5)+(1/5)*x-(2/5)*w;
    w=(9/4)-(1/2)*y+(1/4)*z;
end
```

a) Hvilken metode er dette? Foreta en iterasjon ($N = 1$).

b) Vil metoden konvergere?

Formler i numerikk

- La $p(x)$ være et polynom av grad $\leq n$ som interpolerer $f(x)$ i punktene $x_i, i = 0, 1, \ldots, n$. Forutsatt at x og alle nodene ligger i intervallet $[a, b]$, så gjelder

$$f(x) - p(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \prod_{i=0}^{n} (x - x_i).$$

- Newtons dividerte differansers interpolasjonspolynom $p(x)$ av grad $\leq n$:

$$\begin{aligned} p(x) = {} & f[x_0] + (x - x_0) f[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1) f[x_0, x_1, x_2] \\ & + \cdots + (x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_{n-1}) f[x_0, \ldots, x_n] \end{aligned}$$

- Numerisk derivasjon:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{h}\big[f(x+h) - f(x)\big] + \frac{1}{2} h f''(\xi) \\ f'(x) &= \frac{1}{2h}\big[f(x+h) - f(x-h)\big] - \frac{1}{6} h^2 f'''(\xi) \\ f''(x) &= \frac{1}{h^2}\big[f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)\big] - \frac{1}{12} h^2 f^{(4)}(\xi) \end{aligned}$$

- Simpsons integrasjonsformel:

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)\, dx \approx \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + f_2)$$

- Newtons metode for ligningssystemet $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ er gitt ved

$$\begin{aligned} J^{(k)} \cdot \Delta\mathbf{x}^{(k)} &= -\mathbf{f}\big(\mathbf{x}^{(k)}\big) \\ \mathbf{x}^{(k+1)} &= \mathbf{x}^{(k)} + \Delta\mathbf{x}^{(k)}. \end{aligned}$$

- Iterative teknikker for løsning av et lineært ligningssystem

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

$$\begin{aligned} \text{Jacobi:} \quad x_i^{(k+1)} &= \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} \right) \\ \text{Gauss–Seidel:} \quad x_i^{(k+1)} &= \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} \right) \end{aligned}$$

- Heuns metode for løsning av $\mathbf{y}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{y})$:

$$\begin{aligned} \mathbf{k_1} &= h\mathbf{f}(x_n, \mathbf{y}_n) \\ \mathbf{k_2} &= h\mathbf{f}(x_n + h, \mathbf{y}_n + \mathbf{k_1}) \\ \mathbf{y}_{n+1} &= \mathbf{y}_n + \frac{1}{2}(\mathbf{k_1} + \mathbf{k_2}) \end{aligned}$$

Tabell over noen Laplace-transformer

$f(t)$	$F(s) = \mathscr{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\ \mathrm{d}t$
1	$\frac{1}{s}$
t	$\frac{1}{s^2}$
$t^n \ (n = 0, 1, 2, \ldots)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$\cosh at$	$\frac{s}{s^2-a^2}$
$\sinh at$	$\frac{a}{s^2-a^2}$
$e^{at} \cos \omega t$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+\omega^2}$
$e^{at} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2}$

Tabell over noen Fourier-transformer

$f(x)$	$\hat{f}(w) = \mathcal{F}(f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-iwx}\ \mathrm{d}x$
$g(x) = f(ax)$	$\hat{g}(w) = \frac{1}{a} \hat{f}\left(\frac{w}{a}\right)$
$u(x) - u(x-a)$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{\sin aw}{w} - i \frac{1 - \cos aw}{w} \right)$
$u(x)e^{-x}$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{1+w^2} - i \frac{w}{1+w^2} \right)$
e^{-ax^2}	$\frac{1}{\sqrt{2a}} e^{-\frac{w^2}{4a}}$
$e^{-a\|x\|}$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a}{w^2+a^2}$