NTNU
Kunnskap for en bedre verden

Institutt for matematiske fag

Eksamensoppgave i TMA4123/TMA4125/TMA4130 Matematikk 4M/4N

Faglig kontakt under eksamen: Gard Spreemann

Tlf: 938 38 503

Eksamensdato: Fredag 14.aug. 2015

Eksamenstid (fra–til): 09:00-13:00

Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler: C: Bestemt enkel kalkulator og Rottmann matematisk formelsamling.

Annen informasjon:
Alle svar må begrunnes. Du må ha med nok mellomregninger til at fremgangsmåten din kommer tydelig frem.

Merk at oppgave 1 finnes i to utgaver, én kun for 4M og én kun for 4N!

Formelark er vedlagt.

Målform/språk: bokmål

Antall sider: 4

Antall sider vedlegg: 2

Kontrollert av:

22/6-15

Dato Sign

Oppgave 1 Kun for TMA4123 Matematikk 4M!

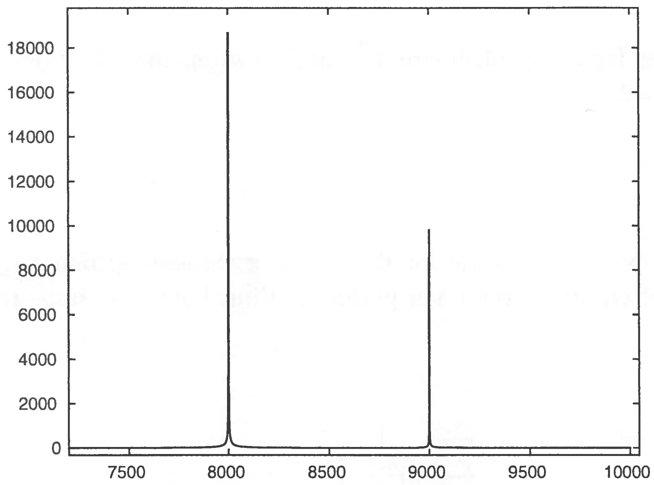
a) La **f** betegne en vektor med N reelle komponenter. Vi skriver $\hat{\mathbf{f}}$ for dens diskrete Fourier-transformerte. Vis at

$$|\hat{f}_{N-n}| = |\hat{f}_n|.$$

b) Anta at du kjører Matlab-kodesnutten

```
t = linspace(0, 5, 10000);
y = 2*cos(a*2*pi*t) + 4*cos(b*2*pi*t);
plot(abs(fft(y)), 'black');
```

og at den gir plottet vi ser deler av i figur 1.



Figur 1: Deler av plottet i oppgave 1 for 4M.

Hva må (omtrentlig) verdiene til konstantene a og b i koden være for å gi dette plottet?

Oppgave 1 Kun for TMA4125/TMA4130 Matematikk 4N!

a) La u være Heavisides trappefunksjon. Finn konvolusjonen $u * u$.

b) La F være definert av

$$F(s) = \ln \frac{s+1}{s+2}.$$

Finn dens invers-Laplace-transformerte.

Oppgave 2 Finn polynomet av lavest grad som interpolerer $\cos \pi x$ i punktene $x = 0$, $x = 1/2$ og $x = 3/2$.

Oppgave 3

a) La $R > 0$ og $m > 0$. Verifisér at $\sqrt[m]{R}$ er et fikspunkt for funksjonen g definert av

$$g(x) = 1 - \frac{R}{x^m} + \frac{R}{x^{m-1}}.$$

Approksimér $\sqrt[3]{9}$ ved å gjøre to skritt med iterasjonen $x_{n+1} = g(x_n)$ fra startverdien $x_0 = 2$.

b) Skriv ned en iterasjon for å approksimere $\sqrt[3]{9}$ med Newtons metode. Gjør to skritt fra startverdien $x_0 = 2$.

Oppgave 4

a) La f være definert av $f(x) = \sin x$ for $0 \leq x \leq \pi$. Skissér grafen til den like 2π-periodiske utvidelsen av f over noen perioder. Finn Fourier-cosinus-rekken til f.

b) Beregn rekken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1}.$$

Oppgave 5 Vi skal studere den partielle differensialligningen

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad t > 0 \tag{1}$$

med randbetingelser

$$u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = 0 \quad \text{for alle } t > 0$$

og initialbetingelsen

$$u(x,0) = x(1-x) \quad \text{for } 0 \leq x \leq 1. \tag{2}$$

a) Skriv ned en eksplisitt metode for å løse den partielle differensialligningen (1) numerisk med de oppgitte randbetingelsene.

Bruk en skrittlengde på $h = 1/4$ i rom og $k = 1/10$ i tid, og utfør ett tidsskritt med metoden fra initialbetingelsen (2).

b) Skriv ned Crank–Nicolsons metode for å løse den partielle differensialligningen (1) numerisk med de oppgitte randbetingelsene.

Bruk en skrittlengde på $h = 1/4$ i rom og $k = 1/10$ i tid, og utfør ett tidsskritt med metoden fra initialbetingelsen (2).

Oppgave 6 La $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være definert ved

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{for } |x| < 2 \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

a) Beregn den Fourier-transformerte til f. Beregn også den Fourier-transformerte til konvolusjonen $f * f$.

b) Beregn integralet

$$\int_0^\infty \frac{\sin 2\omega}{\omega} \cos \omega \, d\omega.$$

Formelark følger som vedlegg.

Numerical formulas

- Let $p(x)$ be the polynomial of degree $\leq n$ which coincides with $f(x)$ at points $x_i, i = 0, 1, \dots, n$. Under the assumption that x and all the nodes x_j lie in the interval $[a, b]$, we have
$$f(x) - p(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \prod_{i=0}^{n} (x - x_i).$$
- Newton's divided difference interpolation formula $p(x)$ of degree $\leq n$:
$$\begin{aligned} p(x) = f[x_0] + (x - x_0) f[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1) f[x_0, x_1, x_2] \\ + \dots + (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1}) f[x_0, \dots, x_n] \end{aligned}$$
- Simpson's rule of integration:
$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)\, \mathrm{d}x \approx \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + f_2)$$
Error bounded by $h^4 \frac{b-a}{180} \max_{a \leq x \leq b} |f^{(4)}(x)|$.
- Newton's method for solving a system of nonlinear equations $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ is given by the scheme
$$\begin{aligned} J^{(k)} \cdot \Delta \mathbf{x}^{(k)} &= -\mathbf{f}(\mathbf{x}^{(k)}) \\ \mathbf{x}^{(k+1)} &= \mathbf{x}^{(k)} + \Delta \mathbf{x}^{(k)}. \end{aligned}$$
- Iteration methods for solving systems of linear equations $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ when $A_{i,i} = 1$:
$$\text{Jacobi:} \quad \mathbf{x}^{(m+1)} = \mathbf{b} - (A - I)\mathbf{x}^{(m)}$$
$$\text{Gauss–Seidel:} \quad \mathbf{x}^{(m+1)} = \mathbf{b} - L\mathbf{x}^{(m+1)} - U\mathbf{x}^{(m)}$$
Strict diagonal dominance of A is a sufficient convergence criterion for both.
- Butcher tables for Runge–Kutta methods, where
$$\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + \sum_{i=1}^{s} b_i \mathbf{k}_i, \qquad \mathbf{k}_i = h\mathbf{f}(x_n + c_i h, \mathbf{y}_n + \sum_{j=1}^{s} a_{i,j} \mathbf{k}_j):$$

(Forward) Euler:
$$\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline & 1 \end{array}$$
Backward Euler:
$$\begin{array}{c|c} 1 & 1 \\ \hline & 1 \end{array}$$
Heun/improved Euler:
$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ \hline & 1/2 & 1/2 \end{array}$$
RK4:
$$\begin{array}{c|cccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline & 1/6 & 1/3 & 1/3 & 1/6 \end{array}$$

- Discrete Fourier transform:
$$\hat{f}_n = \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-2\pi i n k / N}$$

Table of some Laplace transforms

$f(t)$	$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt$
1	$\frac{1}{s}$
t	$\frac{1}{s^2}$
$t^n \ (n = 0, 1, 2, \ldots)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$\cosh at$	$\frac{s}{s^2-a^2}$
$\sinh at$	$\frac{a}{s^2-a^2}$
$e^{at}\cos \omega t$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+\omega^2}$
$e^{at}\sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2}$
$\delta(t-a)$	e^{-as}

Table of some Fourier transforms

$f(x)$	$\hat{f}(\omega) = \mathcal{F}\{f(x)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x}\, dx$
$g(x) = f(ax)$	$\hat{g}(\omega) = \frac{1}{a}\hat{f}\left(\frac{\omega}{a}\right)$
e^{-ax^2}	$\frac{1}{\sqrt{2a}} e^{-\frac{\omega^2}{4a}}$
$e^{-a\|x\|}$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a}{\omega^2+a^2}$
$u(x) - u(x-a)$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{\sin a\omega}{\omega} - i\frac{1-\cos a\omega}{\omega}\right)$
$u(x)e^{-x}$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{1+\omega^2} - i\frac{\omega}{1+\omega^2}\right)$