Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Øving 11

1 Gitt differensialligningen

$$y' = \frac{y}{x} - \left(\frac{y}{x}\right)^2, \qquad 1 \le x \le 2, \qquad y(1) = 1.$$

a) Sjekk at den eksakte løsningen er

$$y(x) = \frac{x}{1 + \ln x}.$$

b) Finn en numerisk tilnærmelse til $y(2)$ ved å bruke

i) Eulers metode, med steglengde $h = 0.25$ (Vink: Sjekk at nest siste steg er $y_3 \approx 1.093...$)

ii) Heuns metode, med steglengde $h = 0.5$. (Vink: Sjekk at $y_1 \approx 1.055...$)

iii) Klassisk Runge–Kutta metode (RK4), med steglengde $h = 1$.

c) Sammenlign feilene, $Err_{\mathrm{num}}(2) = y(2) - y_{\mathrm{num}}(2)$, i de numeriske løsningene for de tre metodene. Hvor mange beregninger av $f(x, y)$ har det vært nødvendig å gjennomføre for hver metode?

d) Anslå hvor mange skritt som trengs med Eulers metode for å oppnå samme nøyaktighet som du fikk for ett steg med RK4.

Vink: Anta at feilen i y for Eulers metode i $x = 2$, $Err_{\mathrm{Euler}}(2)$, kan skrives $C \times h$ og bestem C ut fra det du fant i (b) og (c). Hold C fast mens du deretter finner en passende h slik at feilen blir omlag Err_{RK}.

e) Adams–Bashforths metode av 2. orden er gitt ved $y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(3f_n - f_{n-1})$ Bruk denne metoden for å finne en numerisk tilnærming til $y(2)$. Bruk skrittlengde $h = 0.5$ og y_1 fra Heuns metode i **a)** til å initialisere metoden.

2 La en differensialligning være gitt av $y' = f(x, y)$. *Baklengs Euler* er en implisitt metode for å løse differensialligninger implisitt. For å utføre et steg med baklengs Euler, må følgende ligning løses

$$y_1 = y_0 + hf(x_1, y_1) \tag{1}$$

Hvis f ikke er veldig enkel, må man bruke en numerisk løser for å løse denne ligningen. **Altså:** for hvert steg i den numeriske løseren av *differensialligningen* må man bruke en numerisk løser for den *algebraiske ligningen* (1).

La oss først bruke fikspunktiterasjon. (Sec. 19.2 i Kreyszig.)

a) Anta at $\left|\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right| \leq L$ for alle (x, y). Vis at da finnes en $h_0 > 0$ slik at for alle $h < h_0$ konvergerer fikspunktiterasjonen definert av $z_{k+1} = y_0 + hf(x_1, z_k)$ konvergerer mot en løsning av (1). (Pass på at du ikke forveksler de to følgene $y_0, y_1, \ldots$ og $z_0, z_1, \ldots$, den sistnevnte konvergerer mot z_1.)
Hint: Theorem 1 i Sec. 19.2 s. 797 (s. 789 i 9. utgave).

Vi kan også bruke Newtons metode for å løse (1). Dette krever at vi kjenner $f_y(x, y) := \frac{\partial f(x,y)}{\partial} y$.

b) Finn iterasjonsformelen for Newtons metode anvendt på 1.

c) Vis at det finnes en $h_0 > 0$ slik at for alle $h < h_0$ har Newtons metode anvendt på (1) kvadratisk konvergens.

d) For både fikspunktiterasjonen og Newtons metode bør z_0 ligge nærme y_1, som vi ikke kjenner. Hva kan man bruke for z_0, som ikke krever mye beregning?

3 Skriv om følgende ligninger til første ordens systemer og skriv ut formelen for Eulers metode med steglengde h.

$$\begin{array}{lc} (i) & y'' + y = \sin(2x)\,,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0. \\ (ii) & y'' - \left(1 - y^2\right) y' + y = \cos(x)\,, y(0) = 1, y'(0) = 2. \\ (iii) & y'''' + 3y'' + y = x,\ y(1) = 0,\ y'(1) = 1,\ y''(1) = 2,\ y'''(1) = 3 \end{array}$$

Det er ikke nødvendig å sette inn tall.