

Løsningsforslag for eksamen i Matematikk 4M, TMA4122, 10. desember 2015

Oppgave 1

a)

$$\text{Vi har } a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x dx = \frac{\pi}{2} \text{ og } a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx dx = \frac{2}{\pi} \left(\left[\frac{x}{n} \sin nx \right]_0^{\pi} - \frac{1}{n} \int_0^{\pi} \sin nx dx \right) =$$

$$\frac{2}{\pi} \left[\frac{\cos nx}{n^2} \right]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi} \left(\frac{(-1)^n - 1}{n^2} \right) = \begin{cases} -\frac{4}{\pi n^2}, & \text{for } n \text{ odde} \\ 0, & \text{for } n \text{ like} \end{cases}$$

Altså er Fourier-cosinusrekka til f gitt ved

$$f \sim \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2}.$$

Siden den like periodiske utvidelsen til f er kontinuerlig for $x = 0$, er

$$0 = f(0) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos 0}{(2k+1)^2} \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

b)

$u(x, t) = F(x)G(t)$ innsatt i differensialligninga gir

$$F(x)G'(t) = 2F''(x)G(t) \Leftrightarrow \frac{F''(x)}{F(x)} = \frac{G'(t)}{2G(t)} = k. \text{ Dvs.}$$

$$F'' - kF = 0 \text{ og } G' - 2kG = 0$$

for konstant k .

Randbetingelsene gir kravet $F'(0) = F'(\pi) = 0$.

Drøfter løsninger for F :

Tilfelle 1: $k = \lambda^2 > 0$. Ligninga $F'' - \lambda^2 F = 0$ har generell løsning $F(x) = Ae^{\lambda x} + Be^{-\lambda x}$ for vilkårlige konstanter A, B . Altså er $F'(x) = \lambda(Ae^{\lambda x} - Be^{-\lambda x})$. $F'(0) = 0$ gir $A = B$ siden

$\lambda \neq 0$. Dvs. $F'(x) = \lambda A(e^{\lambda x} - e^{-\lambda x})$. $F'(\pi) = 0$ gir $e^{\lambda\pi} = e^{-\lambda\pi} \Leftrightarrow e^{2\lambda\pi} = 1$ siden $A \neq 0$. Dette er umulig siden $\lambda \neq 0$. Altså ingen F for $k > 0$.

Tilfelle 2: $k = 0$. Da er $F''(x) = 0$ som gir $F(x) = Bx + A$ for konstanter A, B . M.a.o. $F'(x) = B$. Dvs. når $B = 0$ er $F'(0) = F'(\pi) = 0$. Altså får vi løsning $F_0(x) = A_0$ for $k = 0$.

Tilfelle 3: $k = -\lambda^2 < 0$. Da har vi $F'' + \lambda^2 F = 0$ med generell løsning $F(x) = A \cos \lambda x + B \sin \lambda x$, der A, B er konstanter. Altså er $F'(x) = \lambda(-A \sin \lambda x + B \cos \lambda x)$. $F'(0) = 0$ gir da $B = 0$. Dvs. $F'(x) = -\lambda A \sin \lambda x$. $F'(\pi) = 0$ gir $\sin \lambda\pi = 0$ siden λ og A er ulik null. For positive λ er dette oppfylt for $\lambda = n, n = 1, 2, 3, \dots$. Altså for $k = -n^2$ får vi $F_n(x) = A_n \cos nx, n = 1, 2, 3, \dots$

Finder korresponderende $G(t)$ for tillatte verdier av k :

$k = 0$: Da er $G_0'(t) = 0 \Leftrightarrow G_0(t) = C_0$, der C_0 er en konstant.

$k = -n^2, n = 1, 2, 3, \dots$: Da er $G_n' + 2n^2 G_n = 0 \Leftrightarrow G_n(t) = C_n e^{-2n^2 t}$, der C_n er konstant.

Altså er alle løsninger på randverdi problemet på formen $F(x)G(t)$ gitt ved

$u_0(x, t) = B_0$ og $u_n(x, t) = B_n e^{-2n^2 t} \cos nx, n = 1, 2, 3, \dots$, der vi har erstattet konstantene $A_n C_n$ med B_n .

c)

Ved superposisjonsprinsippet er

$$u(x, t) = B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{-2n^2 t} \cos nx$$

(formell) løsning på randverdi problemet. Vi har $u(x, 0) = x$ som gir

$$x = B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos nx.$$

Fra oppgave 1a) er da $B_0 = \frac{\pi}{2}, B_{2k} = 0, B_{2k+1} = -\frac{4}{\pi} \frac{1}{(2k+1)^2}$, som gir

$$u(x,t) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-2(2k+1)^2 t} \cos(2k+1)x}{(2k+1)^2}.$$

Oppgave 1

a)

Vi har

$$\begin{aligned} \hat{f}(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^1 (1-|x|) e^{-i\omega x} dx = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{-1}^0 (1+x) e^{-i\omega x} dx + \int_0^1 (1-x) e^{-i\omega x} dx \right). \end{aligned}$$

Vi har $\int x e^{ax} dx = \left(\frac{x}{a} - \frac{1}{a^2} \right) e^{ax} + C$ for $a \neq 0$. La $a = -i\omega$. Da er

$$\begin{aligned} \hat{f}(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{-1}^0 \left[\frac{e^{ax}}{a} + \left(\frac{x}{a} - \frac{1}{a^2} \right) e^{ax} \right] + \int_0^1 \left[\frac{e^{ax}}{a} - \left(\frac{x}{a} - \frac{1}{a^2} \right) e^{ax} \right] \right) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1-e^{-a}}{a} + \left(-\frac{1}{a^2} - \left(\frac{-1}{a} - \frac{1}{a^2} \right) e^{-a} \right) \right) + \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{e^a - 1}{a} - \left(\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a^2} \right) e^a + \frac{1}{a^2} \right) \right) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^a + e^{-a} - 2}{a^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-i\omega} + e^{i\omega} - 2}{(-i\omega)^2} = \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1 - \cos \omega}{\omega^2}, \end{aligned}$$

siden $e^{i\omega} + e^{-i\omega} = 2 \cos \omega$. For $\omega = 0$ er

$$\hat{f}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega \cdot 0} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^1 (1-|x|) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.$$

b)

$$\begin{aligned} \text{Siden } f \text{ er kontinuerlig er } f(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega x} d\omega = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1 - \cos \omega}{\omega^2} e^{i\omega x} d\omega = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - \cos \omega}{\omega^2} (\cos \omega x + i \sin \omega x) d\omega = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - \cos \omega}{\omega^2} \cos \omega x d\omega. \end{aligned}$$

Imaginærdelen forsvinner siden $\frac{1 - \cos \omega}{\omega^2} \sin \omega x$ er en odde funksjon i variabelen ω . Velger vi

$x = \frac{1}{2}$ og bruker den trigonometriske identiteten får vi

$$\frac{1}{2} = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2 \sin^2 \frac{\omega}{2}}{\omega^2} \cos \frac{\omega}{2} d\omega = \frac{4}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 u \cos u}{(2u)^2} du, \text{ der den siste likheten oppnås}$$

ved variabelbyttet $\omega = 2u$. Dette gir

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 u \cos u}{u^2} du = \frac{\pi}{2}.$$

Oppgave 3

Vi skriver ligningssystemet på formen

$$x = \frac{1}{5}y - \frac{1}{5}z + 1$$

$$y = -\frac{1}{10}x - \frac{1}{10}z + \frac{4}{10}$$

$$z = -\frac{1}{5}x - \frac{1}{5}y + \frac{7}{5}$$

som gir Gauss-Seidel iterasjon

$$x_{n+1} = \frac{1}{5}y_n - \frac{1}{5}z_n + 1$$

$$y_{n+1} = -\frac{1}{10}x_{n+1} - \frac{1}{10}z_n + \frac{4}{10}$$

$$z_{n+1} = -\frac{1}{5}x_{n+1} - \frac{1}{5}y_{n+1} + \frac{7}{5}$$

Med $(x_0, y_0, z_0) = (1, 0, 1)$ får vi

$$x_1 = -\frac{1}{5} + 1 = \frac{4}{5}, \quad y_1 = -\frac{4}{50} - \frac{1}{10} + \frac{4}{10} = \frac{11}{50}, \quad \text{og } z_1 = -\frac{4}{25} - \frac{11}{250} + \frac{7}{5} = \frac{299}{250}.$$

$$\text{Altså er } (x_1, y_1, z_1) = \left(\frac{4}{5}, \frac{11}{50}, \frac{62}{125} \right) = (0.8, 0.22, 1.196).$$

Oppgave 4

Her kan en bruke Lagrange multipler, Newtons dividerte differens, eller rett og slett sette opp et lineært ligningssystem for koeffisientene til $p(x)$. Alle metoder gir (selvsagt) samme svar.

Det raskeste er Newtons dividerte differenser:

-1 -6

$$\frac{-2 - (-6)}{1 - (-1)} = 2$$

1 -2

$$\frac{-1 - 2}{2 - (-1)} = -1$$

$$\frac{-3 - (-2)}{2 - 1} = -1$$

$$\frac{3 - (-1)}{3 - (-1)} = 1$$

2 -3

$$\frac{5 - (-1)}{3 - 1} = 3$$

$$\frac{2 - (-3)}{3 - 2} = 5$$

3 2

Dette gir

$$p(x) = -6 + 2(x - (-1)) - (x - (-1))(x - 1) + (x - (-1))(x - 1)(x - 2) = x^3 - 3x^2 + x - 1.$$

Oppgave 5

La $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$, $g(x, y) = xy + x - 1$. Vi skal løse ligningssystemet

$f(x, y) = 0$, $g(x, y) = 0$ med Newtons metode med startverdier $(x_0, y_0) = \left(\frac{1}{2}, 1\right)$. Denne er gitt ved iterasjonen

$\vec{x}_{n+1} = \vec{x}_n - J^{-1}(\vec{x}_n) \vec{f}(\vec{x}_n)$, med \vec{x}_0 gitt. $\vec{x}_n = \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix}$ er tilnærmelser til løsninga (etter n

itereringer), $\vec{f}(\vec{x}) = \begin{bmatrix} f(x, y) \\ g(x, y) \end{bmatrix}$, og $J(\vec{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) \end{bmatrix}$.

Vi har

$J(x, y) = \begin{bmatrix} 2x & 2y \\ y+1 & x \end{bmatrix}$, dvs. $J(\frac{1}{2}, 1) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ som gir $J^{-1}(\frac{1}{2}, 1) = \frac{2}{7} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$. Videre

er $\vec{f}(\frac{1}{2}, 1) = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ 0 \end{bmatrix}$. Altså har vi

$$\vec{x}_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{2}{7} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{15}{28} \\ \frac{6}{7} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0.5357 \\ 0.8571 \end{bmatrix}.$$

Oppgave 6

Sett $u = y, v = y'$. Da er $u' = y' = v$ og $v' = y'' = xy^2 = xu^2$. Dvs. systemet av første ordens ligninger er

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} v \\ xu^2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \vec{y}' = \vec{f}(\vec{y}, x), \text{ der } \vec{y} = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}.$$

Heuns metode med steglengde h for system av ligninger er:

La $\vec{y}_{n+1}^* = \vec{y}_n + h\vec{f}(\vec{y}_n, x_n)$ (prediktor).

Ny verdi er da $\vec{y}_{n+1} = \vec{y}_n + \frac{h}{2}(\vec{f}(\vec{y}_n, x_n) + \vec{f}(\vec{y}_{n+1}^*, x_{n+1}))$.

For $\vec{y}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $x_0 = 1$, og $h = 0.1$ får vi

$$\vec{y}_1^* = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + 0.1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \cdot 1^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.2 \\ 2.1 \end{bmatrix}, \text{ og } \vec{y}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \frac{0.1}{2} \left(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \cdot 1^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2.1 \\ 1.1 \cdot (1.2)^2 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 1.205 \\ 2.1292 \end{bmatrix}.$$

Altså er $y(1.1) \approx 1.205$.

Oppgave 7

Vi har $h = \frac{1}{4}$, slik at Trapesmetoden gir

$$\int_0^1 f(x) dx \approx T_4 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \left(\frac{1}{1+0^2} + \frac{2}{1+(\frac{1}{4})^2} + \frac{2}{1+(\frac{1}{2})^2} + \frac{2}{1+(\frac{3}{4})^2} + \frac{1}{1+1^2} \right) = 0.7828$$

med fire signifikante siffer.

$$\text{Vi har } \left| \int_0^1 f(x) dx - T_n \right| \leq \frac{M_2 (1-0)^3}{12n^2} = \frac{1}{6n^2} \text{ der } M_2 = 2 = \max_{x \in [0,1]} |f''(x)|. \text{ Så dersom}$$

$$\frac{1}{6n^2} < 0.0001, \text{ er } n \text{ stor nok. Dette gir } n > \frac{100}{\sqrt{6}} \approx 40.8. \text{ Dvs. med } n = 41 \text{ er vi sikker på at}$$

feilen er mindre enn 0.0001.

Oppgave 8

Taylorpolynomet av 1.grad med restledd for $g(x)$ omkring $x = s$ er

$$g(x) = g(s) + (x-s)g'(s) + \frac{1}{2}(x-s)^2 g''(u),$$

for en u mellom x og s . Altså er

$$\varepsilon_{j+1} = s - x_{j+1} = g(s) - g(x_j) = g(s) - \left[g(s) + (x_j - s)g'(s) + \frac{1}{2}(x_j - s)^2 g''(u) \right] =$$

$$(s - x_j)g'(s) - \frac{1}{2}(s - x_j)^2 g''(u) = \varepsilon_j g'(s) - \frac{1}{2}\varepsilon_j^2 g''(u).$$

