Løsningsforslag for eksamen i Matematikk 4M, TMA4122, 10.desember 2015

Oppgave 1

a)

Vi har $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x dx = \frac{\pi}{2}$ og $a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos nx\, dx = \frac{2}{\pi}\left(\left[\frac{x}{n}\sin nx\right]_0^{\pi} - \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\sin nx\, dx\right) =$

$$\frac{2}{\pi}\left[\frac{\cos nx}{n^2}\right]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi}\left(\frac{(-1)^n - 1}{n^2}\right) = \begin{cases} -\frac{4}{\pi n^2}, \text{ for } n \text{ odde} \\ 0, \text{ for } n \text{ like} \end{cases}$$

Altså er Fourier-cosinusrekka til f gitt ved

$$f \sim \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2}.$$

Siden den like periodiske utvidelsen til f er kontinuerlig for $x = 0$, er

$$0 = f(0) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos 0}{(2k+1)^2} \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

b)

$u(x,t) = F(x)G(t)$ innsatt i differensialligninga gir

$$F(x)G'(t) = 2F''(x)G(t) \Leftrightarrow \frac{F''(x)}{F(x)} = \frac{G'(t)}{2G(t)} = k \text{ . Dvs.}$$

$$F'' - kF = 0 \text{ og } G' - 2kG = 0$$

for konstant k .

Randbetingelsene gir kravet $F'(0) = F'(\pi) = 0$.

Drøfter løsninger for F :

Tilfelle 1: $k = \lambda^2 > 0$. Ligninga $F'' - \lambda^2 F = 0$ har generell løsning $F(x) = Ae^{\lambda x} + Be^{-\lambda x}$ for vilkårlige konstanter A, B . Altså er $F'(x) = \lambda\left(Ae^{\lambda x} - Be^{-\lambda x}\right)$. $F'(0) = 0$ gir $A = B$ siden

$\lambda \neq 0$. Dvs. $F'(x) = \lambda A\left(e^{\lambda x} - e^{-\lambda x}\right)$. $F'(\pi) = 0$ gir $e^{\lambda\pi} = e^{-\lambda\pi} \Leftrightarrow e^{2\lambda\pi} = 1$ siden $A \neq 0$. Dette er umulig siden $\lambda \neq 0$. Altså ingen F for $k > 0$.

Tilfelle 2: $k = 0$. Da er $F''(x) = 0$ som gir $F(x) = Bx + A$ for konstanter A, B. M.a.o. $F'(x) = B$. Dvs. når $B = 0$ er $F'(0) = F'(\pi) = 0$. Altså får vi løsning $F_0(x) = A_0$ for $k = 0$.

Tilfelle 3: $k = -\lambda^2 < 0$. Da har vi $F'' + \lambda^2 F = 0$ med generell løsning $F(x) = A\cos\lambda x + B\sin\lambda x$, der A, B er konstanter. Altså er $F'(x) = \lambda(-A\sin\lambda x + B\cos\lambda x)$. $F'(0) = 0$ gir da $B = 0$. Dvs. $F'(x) = -\lambda A\sin\lambda x$. $F'(\pi) = 0$ gir $\sin\lambda\pi = 0$ siden λ og A er ulik null. For positive λ er dette oppfylt for $\lambda = n, n = 1, 2, 3, \ldots$. Altså for $k = -n^2$ får vi $F_n(x) = A_n \cos nx,\ n = 1, 2, 3, \ldots$.

Finner korresponderende $G(t)$ for tillatte verdier av k :

$k = 0$: Da er $G_0'(t) = 0 \Leftrightarrow G_0(t) = C_0$, der C_0 er en konstant.

$k = -n^2, n = 1, 2, 3, \ldots$: Da er $G_n' + 2n^2 G_n = 0 \Leftrightarrow G_n(t) = C_n e^{-2n^2 t}$, der C_n er konstant.

Altså er alle løsninger på randverdiproblemet på formen $F(x)G(t)$ gitt ved

$u_0(x,t) = B_0$ og $u_n(x,t) = B_n e^{-2n^2 t}\cos nx$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, der vi har erstattet konstantene $A_n C_n$ med B_n.

c)

Vi har

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^{1} (1 - |x|) e^{-i\omega x} dx =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{-1}^{0} (1 + x) e^{-i\omega x} dx + \int_{0}^{1} (1 - x) e^{-i\omega x} dx \right).$$

Vi har $\int x e^{ax} dx = \left(\frac{x}{a} - \frac{1}{a^2} \right) e^{ax} + C$ for $a \neq 0$. La $a = -i\omega$. Da er

$$\hat{f}(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\left[\frac{e^{ax}}{a}+\left(\frac{x}{a}-\frac{1}{a^2}\right)e^{ax}\right]_{-1}^{0}+\left[\frac{e^{ax}}{a}-\left(\frac{x}{a}-\frac{1}{a^2}\right)e^{ax}\right]_{0}^{1}\right)=$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1-e^{-a}}{a}+\left(-\frac{1}{a^2}-\left(\frac{-1}{a}-\frac{1}{a^2}\right)e^{-a}\right)\right)+$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{e^{a}-1}{a}-\left(\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{a^2}\right)e^{a}+\frac{1}{a^2}\right)\right)=$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{e^{a}+e^{-a}-2}{a^2}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{e^{-i\omega}+e^{i\omega}-2}{(-i\omega)^2}=$$

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1-\cos\omega}{\omega^2},$$

siden $e^{i\omega}+e^{-i\omega}=2\cos\omega$. For $\omega=0$ er

$$\hat{f}(0)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-i\omega\cdot 0}dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-1}^{1}(1-|x|)\,dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}.$$

b)

Siden f er kontinuerlig er $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\omega)e^{i\omega x}d\omega=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1-\cos\omega}{\omega^2}e^{i\omega x}d\omega=$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1-\cos\omega}{\omega^2}(\cos\omega x+i\sin\omega x)\,d\omega=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1-\cos\omega}{\omega^2}\cos\omega x\,d\omega.$$

Imaginærdelen forsvinner siden $\frac{1-\cos\omega}{\omega^2}\sin\omega x$ er en odde funksjon i variabelen ω. Velger vi $x=\frac{1}{2}$ og bruker den trigonometriske identiteten får vi

$\frac{1}{2}=f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2\sin^2\frac{\omega}{2}}{\omega^2}\cos\frac{\omega}{2}\,d\omega=\frac{4}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^2 u\cos u}{(2u)^2}du$, der den siste likheten oppnås ved variabelbyttet $\omega=2u$. Dette gir

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 u \cos u}{u^2} du = \frac{\pi}{2}.$$

Oppgave 3

Vi skriver ligningssystemet på formen

$$x = \frac{1}{5}y - \frac{1}{5}z + 1$$

$$y = -\frac{1}{10}x - \frac{1}{10}z + \frac{4}{10}$$

$$z = -\frac{1}{5}x - \frac{1}{5}y + \frac{7}{10}$$

som gir Gauss-Seidel iterasjon

$$x_{n+1} = \frac{1}{5}y_n - \frac{1}{5}z_n + 1$$

$$y_{n+1} = -\frac{1}{10}x_{n+1} - \frac{1}{10}z_n + \frac{4}{10}$$

$$z_{n+1} = -\frac{1}{5}x_{n+1} - \frac{1}{5}y_{n+1} + \frac{7}{10}$$

Med $(x_0, y_0, z_0) = (1,0,1)$ får vi

$$x_1 = -\frac{1}{5} + 1 = \frac{4}{5},\ y_1 = -\frac{4}{50} - \frac{1}{10} + \frac{4}{10} = \frac{11}{50}, \text{ og } z_1 = -\frac{4}{25} - \frac{11}{250} + \frac{7}{10} = \frac{62}{125}.$$

Altså er $(x_1, y_1, z_1) = \left(\frac{4}{5}, \frac{11}{50}, \frac{62}{125}\right) = (0.8, 0.22, 0.496)$.

Oppgave 4

Her kan en bruke Lagrange multipler, Newtons dividerte differens, eller rett og slett sette opp et lineært ligningssystem for koeffisientene til $p(x)$. Alle metoder gir (selvsagt) samme svar.

Det raskeste er Newtons dividerte differenser:

$-1 \quad -6$

$$\frac{-2-(-6)}{1-(-1)} = 2$$

$1 \quad -2$

$$\frac{-1-2}{2-(-1)} = -1$$

$$\frac{-3-(-2)}{2-1} = -1$$

$$\frac{3-(-1)}{3-(-1)} = 1$$

$2 \quad -3$

$$\frac{5-(-1)}{3-1} = 3$$

$$\frac{2-(-3)}{3-2} = 5$$

$3 \quad 2$

Dette gir

$$p(x) = -6 + 2(x-(-1)) - (x-(-1))(x-1) + (x-(-1))(x-1)(x-2) =$$

$$x^3 - 3x^2 + x - 1.$$

Oppgave 5

La $f(x,y) = x^2 + y^2 - 1,\ g(x,y) = xy + x - 1$. Vi skal løse ligningssystemet $f(x,y) = 0, g(x,y) = 0$ med Newtons metode med startverdier $(x_0, y_0) = (\frac{1}{2}, 1)$. Denne er gitt ved iterasjonen

$\vec{x}_{n+1} = \vec{x}_n - J^{-1}(\vec{x}_n)\vec{f}(\vec{x}_n)$, med $\vec{x}_0$ gitt. $\vec{x}_n = \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix}$ er tilnærmelser til løsninga (etter n itereringer), $\vec{f}(\vec{x}) = \begin{bmatrix} f(x,y) \\ g(x,y) \end{bmatrix}$, og $J(\vec{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) \end{bmatrix}$.

Vi har

$J(x,y)=\begin{bmatrix}2x & 2y\\ y+1 & x\end{bmatrix}$, dvs. $J\left(\frac{1}{2},1\right)=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$ som gir $J^{-1}\left(\frac{1}{2},1\right)=\frac{2}{7}\begin{bmatrix}-\frac{1}{2} & 2\\ 2 & -1\end{bmatrix}$. Videre er $\vec{f}\left(\frac{1}{2},1\right)=\begin{bmatrix}\frac{1}{4}\\ 0\end{bmatrix}$. Altså har vi

$$\vec{x}_1=\begin{bmatrix}x_1\\ y_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\ 1\end{bmatrix}-\frac{2}{7}\begin{bmatrix}-\frac{1}{2} & 2\\ 2 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{4}\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{15}{28}\\ \frac{6}{7}\end{bmatrix}\approx\begin{bmatrix}0.5357\\ 0.8571\end{bmatrix}.$$

Oppgave 6

Sett $u=y, v=y'$. Da er $u'=y'=v$ og $v'=y''=xy^2=xu^2$. Dvs. systemet av første ordens ligninger er

$$\begin{bmatrix}u\\ v\end{bmatrix}'=\begin{bmatrix}v\\ xu^2\end{bmatrix}\Leftrightarrow \vec{y}'=\vec{f}\left(\vec{y},x\right), \text{ der } \vec{y}=\begin{bmatrix}u\\ v\end{bmatrix}.$$

Heuns metode med steglengde h for system av ligninger er:

La $\vec{y}^*_{n+1}=\vec{y}_n+h\vec{f}\left(\vec{y}_n,x_n\right)$ (prediktor).

Ny verdi er da $\vec{y}_{n+1}=\vec{y}_n+\frac{h}{2}\left(\vec{f}\left(\vec{y}_n,x_n\right)+\vec{f}\left(\vec{y}^*_{n+1},x_{n+1}\right)\right)$.

For $\vec{y}_0=\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix}$, $x_0=1$, og $h=0.1$ får vi

$$\vec{y}^*_1=\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix}+0.1\begin{bmatrix}2\\ 1\cdot 1^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1.2\\ 2.1\end{bmatrix}, \text{ og } \vec{y}_1=\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix}+\frac{0.1}{2}\left(\begin{bmatrix}2\\ 1\cdot 1^2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2.1\\ 1.1\cdot(1.2)^2\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}1.205\\ 2.1292\end{bmatrix}.$$

Altså er $y(1.1)\approx 1.205$.

Oppgave 7

Vi har $h=\frac{1}{4}$, slik at Trapesmetoden gir

$$\int_0^1 f(x)\,dx\approx T_4=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\left(\frac{1}{1+0^2}+\frac{2}{1+\left(\frac{1}{4}\right)^2}+\frac{2}{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2}+\frac{2}{1+\left(\frac{3}{4}\right)^2}+\frac{1}{1+1^2}\right)=0.7828$$

med fire signifikante siffer.

Vi har $\left|\int_0^1 f(x)\,dx - T_n\right| \le \frac{M_2(1-0)^3}{12n^2} = \frac{1}{6n^2}$ der $M_2 = 2 = \max_{x\in[0,1]} |f''(x)|$. Så dersom

$\frac{1}{6n^2} < 0.0001$, er n stor nok. Dette gir $n > \frac{100}{\sqrt{6}} \approx 40.8$. Dvs. med $n = 41$ er vi sikker på at feilen er mindre enn 0.0001.

Oppgave 8

Taylorpolynomet av 1.grad med restledd for $g(x)$ omkring $x = s$ er

$$g(x) = g(s) + (x-s)g'(s) + \tfrac{1}{2}(x-s)^2 g''(u),$$

for en u mellom x og s. Altså er

$$\varepsilon_{j+1} = s - x_{j+1} = g(s) - g(x_j) = g(s) - \left[g(s) + (x_j - s)g'(s) + \tfrac{1}{2}(x_j - s)^2 g''(u)\right] =$$

$$(s - x_j)g'(s) - \tfrac{1}{2}(s - x_j)^2 g''(u) = \varepsilon_j g'(s) - \tfrac{1}{2}\varepsilon_j^2 g''(u).$$