NTNU

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet

Spesielle funksjonar

Førebuande kurs

Erling Svela

10. August 2023

Spesielle funksjonar

- Vi vil utvide alle elementære funksjonar til $\mathbb{C}$.
- Følgjande uttrykk skal gje meining: $\sin(i)$, $\log(-3)$ og 2^i.
- Metode: Bruk det vi har frå før.

Litt meir om eksponentialfunksjonen

- Mange av eigenskapene til den reelle eksponentialfunksjonen gjeld også for den komplekse, men ikkje alle.
- e er periodisk: $e^{z+2\pi i} = e^z$!
- e kan vera negativ: $e^{2+\pi i} = -e^2$.
- $|e^{x+iy}| = e^x$.

Trigonometriske funksjonar

- Hugs: $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$.
- Litt triksing gjev oss $\sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$ og $\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$.

Definisjon

For eit komplekst tal $z \in \mathbb{C}$ definerer vi

$$\sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \qquad \text{og} \qquad \cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

- Døme: Rekn ut $\sin(i)$ og $\cos(i)$.

Trigonometriske funksjonar

Eksakte formlar for komplekse trigonometriske funksjonar

$$\sin(x+iy) = \sin(x)\cosh(y) + i\cos(x)\sinh(y)$$

$$\cos(x+iy) = \cos(x)\cosh(y) - i\sin(x)\sinh(y)$$

- Både $\sin(z)$ og $\cos(z)$ er uavgrensa.
- Vi kan også definere $\tan(z) = \frac{\sin(z)}{\cos(z)}$.

Logaritmen

- Vi vil ha ein invers til funksjonen $z \to e^z$.
- For reelle tal: Inversfunksjonen til e^x er $\ln(x)$.
- Finn det komplekse talet w slik at $z = e^w$.
- Polarform på z, kartesisk form på w.

Definisjon

Dersom $z = re^{i\theta}$ definerer vi $\ln(z) = \ln(re^{i\theta}) = \ln(r) + i\theta$, der $\theta \in (-\pi, \pi]$.

- Døme: Rekn ut $\ln(-1),\ \ln(2i),\ \ln(1+i)$.

Logaritmen og komplekse potensar

- Kva er i^i?
- Bruk logaritmen

Definisjon

For to komplekse tal z, w definerer vi $z^w = e^{w\ln(z)}$.

- Døme: Rekn ut 2^i.