Kompleks geometri og polarkoordinatar

Førebuande kurs

Erling Svela
8. August 2023

NTNU
Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet

Polarkoordinatar i $\mathbb{R}^2$

- Hugs: Alle punkt (x, y) i planet kan skildras ved hjelp av radius r og argument θ
- $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\theta = \arctan(\frac{y}{x})$.
- $r \in [0, \infty)$, $\theta \in (-\pi, \pi]$
- $x = r\cos(\theta)$, $y = r\sin(\theta)$.

Polarform av komplekse tal

- Vi identifiserer $\mathbb{C}$ med planet $\mathbb{R}^2$, der x-aksen er dei reelle tala, og y-aksen er dei imaginære tala.
- $z = a + bi$ er no eit punkt i planet $\mathbb{R}^2$, så vi prøver å bytte til polarkoordinatar.
- $r = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\cos(\theta) = \frac{a}{r}$, $\sin(\theta) = \frac{b}{r}$
- $z = r\cos(\theta) + ir\sin(\theta)$ er polarforma til z.
- Vi pleier å skrive $r = |z|$ og $\theta = \mathrm{Arg}(z)$.
- Døme: Finn argument og modulus til $3 - 2i$.
- Døme: Dersom z har $r = 2$ og $\theta = \frac{\pi}{3}$, finn polarforma til $\bar{z}$ og $\frac{1}{z}$.

Multiplikasjon i polarkoordinatar.

- Addisjon og subtraksjon er enkelt i $\mathbb{C}$, multiplikasjon og divisjon er vanskeleg.

Multiplikasjon på polarform

Dersom z har modulus r_1 og argument θ_1 og w har modulus r_2 og argument θ_2 så har $z \cdot w$ modulus $r_1 \cdot r_2$ og argument $\theta_1 + \theta_2$.

- Døme: Finn produktet $8\left(\cos(\frac{11\pi}{12}) + i\sin(\frac{11\pi}{12})\right) \cdot \frac{1}{2}\left(\cos(\frac{19\pi}{12}) + i\sin(\frac{19\pi}{12})\right)$
- Finn $\left(2\left(\cos(\frac{3\pi}{4}) + i\sin(\frac{3\pi}{4})\right)\right)^{-1}$.
- Finn $(1 + i\sqrt{3})^{23}$

Ulikskapar og område i det komplekse planet

- Sirklar: $|z - z_0| = c$
- Diskar: $|z - z_0| \leq c$
- Ringar: $c \leq |z - z_0| \leq d$
- Kva med $\mathrm{Im}(z) \leq 1$?