



Noregs teknisk-naturvitskapelege  
universitet  
Institutt for matematiske fag

Kompleks  
funksjonsteori og  
Laplacetransformasjo-  
nar  
Haust 2023  
Oppgavesett 5

## 1 Laplacetransformasjon

1 Bruk definisjonen til å finne laplacetransformasjonen av  $f(t) = t$  og  $f(t) = e^{at}$ .

2 Bruk transformasjonane av  $\cos$  og  $\sin$ , samt  $s$ -skyving til å finne laplacetransformasjonane til  $e^{at} \cos(bt)$  og  $e^{at} \sin(bt)$ .

3 Laplacetransformer funksjonane under.

$$2t + 8, \quad (a - bt)^2, \quad \begin{cases} 1, & t \in [0, 3], \\ 0, & t > 3. \end{cases}$$

4 Bruk tabellen til å finne inverstransformasjonen av funksjonane under.

$$\frac{2}{s^4} - \frac{48}{s^6}, \quad \frac{s}{9s^2 + \frac{\pi^2}{4}}, \quad \frac{1}{(s+a)(s+b)}.$$

5 Laplacetransformer funksjonane under.

$$t^3 e^{-2t}, \quad k e^{-at} \cos(bt), \quad 2e^{-t/2} \sin(4\pi t), \quad (e^t - e^{-t}) \cos(t).$$

**Hint:** Du treng ikkje rekne ut eit einaste integral her. Bruk  $s$ -skyving og tabellen.

6 Finn inverstransformasjonen av funksjonane under.

$$\frac{2\pi}{(s+\pi)^3}, \quad \frac{90}{(s+\sqrt{3})^6}, \quad \frac{6s+7}{2s^2+4s+10}, \quad \frac{4}{s^2-2s-3}$$

**Hint:** Bruk  $s$ -skyving. På den siste kan du anten bruke delbrøksoppspalting eller laplacetransformasjonen til  $\sinh(t)$  (sjå tabellen på wiki-sida).

- 7] Anta at  $\mathcal{L}(f)(s) = F(s)$ . Dersom  $c$  er ein positiv konstant, vis at laplacetransformasjonen til  $f(ct)$  er  $\frac{1}{c}F(\frac{s}{c})$ . **Hint:** Bruk variabelskifte i integralet.

- 8] Klarer du å finne laplacetransformasjonen til

$$f(t) = e^{t^2}?$$

## 2 Delbrøksoppspalting

- 9] Finn delbrøksoppspaltinga til følgjande rasjonale funksjonar:

a)  $\frac{x+1}{(x-1)(x-2)}, \quad \frac{7x+1}{(x-2)(x+3)}, \quad \frac{5x+5}{(x-2)(x+3)}$ .

b)  $\frac{1}{x^2-1}, \quad \frac{3x-2}{x^2+7x+6}, \quad \frac{x+4}{x^2+4x+3}$ .

- 10] I funksjonane under er polynomgraden i teljaren større enn den i nemnaren. Gjer polynomdivisjon, og gjer delbrøksoppspalting på restleddet, dersom det er mogleg.

$$\frac{x^2 + 2x - 3}{x + 1}, \quad \frac{x^5 + 4x^4 + 2}{x^2 + x + 1}, \quad \frac{4x^3 + 1}{4x^3 + x}, \quad \frac{x^4 + 4x^3 + 12x^2 + 17x + 14}{x^3 + 3x^2 + 6x + 4}.$$

**Hint:**  $-1$  er ei rot i  $x^3 + 3x^2 + 6x + 4$ .

- 11] Finn delbrøksoppspaltinga til følgjande rasjonale funksjonar:

a)  $\frac{1}{x^4-1}, \quad \frac{-x^2+2x-1}{(x+1)(x^2+1)}, \quad \frac{2}{(t-1)(1+t^2)}$ .

b)  $\frac{5x}{x^3+x^2-2}$ .

**Hint til b):**  $1$  er ei rot i  $x^3 + x^2 - 2$ .

- 12] Finn delbrøksoppspaltinga til følgjande rasjonale funksjonar:

$$\frac{2}{x^2(x-3)}, \quad \frac{x}{(x+2)^2}, \quad \frac{2x^3+2x+1}{(x^2+1)^2}$$

- 13] Delbrøksoppspalting er mest nyttig på rasjonale funksjonar, men teknikken kan også nyttast på andre uttrykk. Prøv til dømes å finne konstantar  $A, B$  og  $C$  slik at

$$\frac{1}{(e^x - 1)(e^{2x} + e^x + 1)} = \frac{A}{e^x - 1} + \frac{Be^x + C}{e^{2x} + e^x + 1}.$$