Introduksjon til laplacetransformasjonen

Førebuande kurs

Erling Svela

11. August 2023

NTNU

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet

Plan 11.08

Laplacetransformasjon

Delbrøksoppspalting

Eit filosofisk blikk på laplacetransformasjonen

- Vi kan anlysere ein stor klasse funksjonar ved hjelp av kalkulus.
- Mange funksjonar vi møter på i røynda er ikkje fine nok til å bruke kalkulus på.
- Laplacetransformasjonen er eit verktøy som let oss analysere ein større klasse av funksjonar
- Mange vanskelege problem kan bli enklare av at vi laplacetransformerer dei.

Laplacetransformasjonen

Definisjon

For ein funksjon $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ definerer vi laplacetransformasjonen $\mathcal{L}(f)$ som funksjonen

$$\mathcal{L}(f)(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}\, dt.$$

- Vi skriv vanlegvis $\mathcal{L}(f)(s) = F(s)$, og tilsvarande seier vi at $f(t) = \mathcal{L}^{-1}(F)(t)$.
- Døme: Rekn ut laplacetransformasjonen av $f(t) = 1$.
- Døme: Rekn ut laplacetransformasjonen av $f(t) = t^2$.

Eigenskaper

- Linearitet: $\mathcal{L}(af + bg)(s) = aF(s) + bG(s)$.
- Transformasjonen er unik: Dersom $f \neq g$ er $F \neq G$, og motsatt.
- s-skyving: $\mathcal{L}(e^{at}f(t))(s) = F(s-a)$, og $\mathcal{L}^{-1}(F(s-a))(t) = e^{at}f(t)$.

Ulempe

Inversen til laplacetransformasjonen, $\mathcal{L}^{-1}$, har ikkje eit fint uttrykk.

Vanlege transformasjonspar

Sidan vi ikkje kan rekne ut inverstransformasjonen er det nyttig å kunne nokon transformasjonspar på rams:

Vanlege transformasjonspar

Sidan vi ikkje kan rekne ut inverstransformasjonen er det nyttig å kunne nokon transformasjonspar på rams:

$$1, \quad t, \quad t^n \qquad\qquad \frac{1}{s}, \quad \frac{1}{s^2}, \quad \frac{n!}{s^{n+1}}$$

Vanlege transformasjonspar

Sidan vi ikkje kan rekne ut inverstransformasjonen er det nyttig å kunne nokon transformasjonspar på rams:

$$1, \quad t, \quad t^n \qquad\qquad \frac{1}{s}, \quad \frac{1}{s^2}, \quad \frac{n!}{s^{n+1}}$$

$$e^{at} \qquad\qquad \frac{1}{s-a}$$

Vanlege transformasjonspar

Sidan vi ikkje kan rekne ut inverstransformasjonen er det nyttig å kunne nokon transformasjonspar på rams:

$1, \quad t, \quad t^n$	$\dfrac{1}{s}, \quad \dfrac{1}{s^2}, \quad \dfrac{n!}{s^{n+1}}$
e^{at}	$\dfrac{1}{s-a}$
$\cos(at), \quad \sin(at)$	$\dfrac{s}{s^2+a^2}, \quad \dfrac{a}{s^2+a^2}$

Vanlege transformasjonspar

Sidan vi ikkje kan rekne ut inverstransformasjonen er det nyttig å kunne nokon transformasjonspar på rams:

$1, \quad t, \quad t^n$	$\frac{1}{s}, \quad \frac{1}{s^2}, \quad \frac{n!}{s^{n+1}}$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
$\cos(at), \quad \sin(at)$	$\frac{s}{s^2+a^2}, \quad \frac{a}{s^2+a^2}$
$e^{at}\cos(bt), \quad e^{at}\sin(bt)$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}. \quad \frac{b}{(s-a)^2+b^2}$

Plan 11.08

Laplacetransformasjon

Delbrøksoppspalting

Motivasjon

- Delbrøksoppspalting er ein nyttig teknikk for å analysere rasjonale uttrykk som $\frac{x-1}{x^2+4x+4}$.
- De har kanskje brukt det tidlegare for å integrere rasjonale funksjonar.
- Vi skal bruke delbrøksoppspalting for å inverstransformere funksjonar.

Delbrøksoppspalting i eit nøtteskal

Tilfelle 1

$$\frac{cx+d}{(x-a)(x-b)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b}$$

Tilfelle 2

$$\frac{bx+c}{(x-a)^2} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{(x-a)^2}$$

Tilfelle 3

$$\frac{dx^2+ex+f}{(x-a)(x^2+bx+c)} = \frac{A}{x-a} + \frac{Bx+C}{x^2+bx+c}$$

Meir delbrøksoppspalting

Tilfelle 4

$$\frac{cx^3 + dx^2 + ex + f}{(x^2 + ax + b)^2} = \frac{Ax + B}{x^2 + ax + b} + \frac{Cx + D}{(x^2 + ax + b)^2}$$

Tilfelle 5

Dersom polynomgraden er høgare i teljar enn i nemnar, gjer polynomdivisjon, og så delbrøksoppspalting på resten.

Døme

- Spalt opp $\frac{3x+4}{x^2+x-6}$.
- Spalt opp $\frac{2x^4}{(x-1)(x^2+4)^2}$
- Spalt opp $\frac{3x^2-x+1}{(x+2)^3(x^2+2x+5)}$.

Ein nærmare kikk på tilfelle 1 og laplacetransformasjon

- Tilfelle 1 er det desidert vanlegaste tilfellet vi møter.
- Ved linearitet kan vi dela $\frac{cx+d}{(x-a)(x-b)}$ opp i $c\frac{x}{(x-a)(x-b)} + d\frac{1}{(x-a)(x-b)}$.

Eksplisitte formlar for delbrøksoppspalting.

$$\frac{1}{(x-a)(x-b)} = \frac{1}{a-b}\left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x-b}\right),$$

$$\frac{x}{(x-a)(x-b)} = \frac{1}{a-b}\left(\frac{a}{x-a} - \frac{b}{x-b}\right)$$

- Dersom de hugser desse formlane kan de enkelt finne delbrøksoppspaltinga til alle tilfelle 1-uttrykk.

Laplacetransformasjon i tilfelle 1

- Ved å kombinere dei eksplisitte formlane for delbrøksoppspalting med det vi veit om laplacetransformasjon får vi:

Nyttige inversformlar

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s-a)(s-b)}\right)(t) = \frac{1}{a-b}\left(e^{at} - e^{bt}\right)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{(s-a)(s-b)}\right)(t) = \frac{1}{a-b}\left(ae^{at} - be^{bt}\right)$$