NTNU

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet

Komplekse eksponentialfunksjonar og røtter

Førebuande kurs

Erling Svela

9. August 2023

Eksponentialfunksjonen i $\mathbb{C}$

- Vi vil også ha komplekse funksjonar, ikkje berre komplekse tal.
- Kva er e^i ?
- Kva er e^{1+i} ?

Definisjon

Gitt eit komplekst tal $z = a + bi$ definerer vi eksponentialfunksjonen som

$$e^z = e^a(\cos(b) + i\sin(b)).$$

Regel

Vi har $e^{z+w} = e^z \cdot e^w$ for alle komplekse tal z og w.

Eksponentialfunksjonar og polarform

- Hugs at $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$.
- Vi får ei ryddigare polarform: $z = r\cos(\theta) + ir\sin(\theta) = re^{i\theta}$.

Røter av komplekse tal

- Ved hjelp av komplekse tal klarte vi å løyse alle likninger på forma $x^2 = a$, sjølv for negative a.
- Kva med $z^n = w$ for komplekse tal z og w?

Definisjon

z er ei n-te rot av w dersom $z^n = w$. Vi skriv $z = \sqrt[n]{w}$.

Korleis rekne ut røter av komplekse tal

- Bytt til polarform: $z^n = w \implies \left(r_1 e^{i\theta_1}\right)^n = r_2 e^{i\theta} \implies r_1^n e^{in\theta_1} = r_2 e^{i\theta_2}$.
- n-terøttene til $w = r_2 e^{i\theta_2}$ er på forma $\sqrt[n]{r_2} e^{i\frac{\theta_2}{n} + \frac{2\pi ik}{n}}$, der $k \in \{0, 1, 2, .., n-1\}$.
- Døme: Finn alle løysinger på likninga $z^4 + 2 = 0$.
- Døme: Finn alle løysinger på likninga $z^n - 1 = 0$.

Andregradsformelen i $\mathbb{C}$

- Andregradsformelen er veldig nyttig for likninger med reelle koeffisientar, men den kan også brukast dersom koeffisientane er komplekse.
- Døme: Finn alle løysinger på likninga $z^2 + 2iz - 1 - i = 0$.
- Døme: Finn alle løysinger på likninga $z^2 + 2z + 4 = 0$.

Algebraens fundamentalteorem

- Vi kan no løyse alle polynomlikninger.

Teorem

La $a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$ vera eit polynom med komplekse koeffisientar, og $n \in \mathbb{N}$. Då har P minst eitt nullpunkt i dei komplekse tala, og P kan faktoriserast fullstendig: $P(z) = \Pi_{i=1}^{K} (z - z_i)^{m_i}$.