NTNU

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet

Heavisidefunksjonen og Dirac-δ

Førebuande kurs

Erling Svela

16. August 2023

Heavisidefunksjonen

- Vi vil ha ein systematisk måte å skildre digitale signal som funksjonar.

Definisjon

Heavisidefunksjonen er definert for alle $t \in \mathbb{R}$ som

$$u(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0 & t \leq 0. \end{cases}$$

- Vi skriv $u(t-a)$ som $u_a(t)$.
- Døme: Kva er $f(t) \cdot u_a(t)$? Kva med $f(t-a)u_a(t)$?
- Døme: Kva er $u_a(t) - u_b(t)$?

Laplacetransformasjonen til u_a og t-skyving

Resultat

$$\mathcal{L}(u_a)(s) = \frac{e^{-as}}{s}$$

Vi har også

$$\mathcal{L}(f(t-a)\cdot u(t-a))(s) = e^{-as}F(s),$$

altså

$$\mathcal{L}^{-1}(e^{-as}F(s))(t) = f(t-a)\cdot u(t-a).$$

- Alternativt kan vi også skrive $\mathcal{L}(f(t)\cdot u_a(t))(s) = e^{-as}\mathcal{L}(f(t+a))(s)$.

Dirac-δ-funksjonen

- Vi vil også ha ein funksjon som modellerer tilføring av energi til eit system.

Definisjon

Diracs δ er "funksjonen" som tilfredsstiller

$$\int_a^b \delta(t)\,dt = \begin{cases} 1, & a \leq 0 \leq b \\ 0, & \text{ellers} \end{cases} \qquad \text{og} \qquad \int_0^\infty f(t)\delta(t-x)\,dt = f(x).$$

- Merk: δ er IKKJE ein funksjon!
- Som med heavisidefunksjonen skriv vi $\delta_a(t) = \delta(t-a)$

Laplacetransformasjonen til δ

- Frå definisjonen av δ har vi at $\mathcal{L}(\delta)(s) = 1$.
- Vi får også at $\mathcal{L}(\delta_a)(s) = e^{-as}$.

Differensiallikninger med u og δ

- Likninger som $x''(t) + 4x(t) = u_1(t)$ dukker ofte opp i reguleringsteknikk.
- Laplacemetoden gjev oss ei løysing, sjølv om u_1 ikkje er ein deriverbar funksjon.
- Døme: Løys $x''(t) + 4x(t) = u_1(t)$ med initialbetingelsar $x'(0) = x(0) = 1$.
- Døme: Løys $x''(t) + 4x(t) = \delta_2(t)$ med initialbetingelsar $x'(0) = x(0) = 1$.

NTNU