NTNU
Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet

# Laplacemetoden for differensiallikninger

## Førebuande kurs

Erling Svela
15. August 2023

# Laplace og derivasjon

- Hovudgrunnen til å lære om laplacetransformasjonen er samspelet mellom laplace og derivasjon.

**Resultat**

Dersom $\mathcal{L}(f) = F$ har vi

$$\mathcal{L}(f')(s) = sF(s) - f(0),$$

$$\mathcal{L}(f'')(s) = s^2F(s) - sf(0) - f'(0).$$

- Så laplacetransformasjon gjer derivasjon om til multiplikasjon!

# Differensiallikngar

- Døme: Løys initialverdiproblemet $\begin{cases} y''(t) + y(t) = t \\ y(0) = 1 = y'(0). \end{cases}$
- Døme: Løys initialverdiproblemet $\begin{cases} y''(t) + y'(t) + 9y(t) = 0 \\ y(0) = \frac{4}{25},\ y'(0)) = 0. \end{cases}$
- Døme: Løys initialverdiproblemet $\begin{cases} y''(t) + y(t) = 2t \\ y(\frac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{2},\ y'(\frac{\pi}{4}) = 2 - \sqrt{2}. \end{cases}$

# Laplacemetoden for differensiallikningar

Gitt eit initalverdiproblem $\begin{cases} D(x)(t) = f(t) \\ \mathrm{x}(0) = \mathrm{a} \end{cases}$ kan du følgje desse tre stega for å finne løysinga:

- 1. Laplacetransformer difflikninga for å få ei algebraisk likning.
- 2. Løys algebralikninga med delbrøksoppspalting.
- 3. Inverstransformer løysinga ved hjelp av tabellen.

Fordelar med laplacemetoden:

- Inhomogene likninger er like enkle å løyse som homogene.
- Initialverdiane dukker automatisk opp i den algebraiske likninga.
- Vi kan bruke same metodar på enkle $f$ som på vanskelege $f$ (som $\delta$).

# Laplace og integrasjon

**Resultat**

Vi lét $g(t) = \int_0^t f(u)\,du$. Dersom $\mathcal{L}(f) = F(s)$, så er

$$\mathcal{L}(g)(s) = \frac{1}{s}F(s) \qquad \text{og} \qquad \int_0^t f(u)\,du = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s}F(s)\right)(t).$$

- Laplacetransformasjon gjer integrasjon om til divisjon.
- Dette gjer oss i stand til å løyse integrallikninger som $y(t) + \int_0^t y(u)\,du = 2$, og integro-differensiallikninger som $y'(t) + 100\int_0^t y(u)\,du = \sin(t)$.

# Derivasjon og integrasjon på andre sida

- Vi har sett kva som skjer når vi først deriverer, og så laplacetransformerer, men kva dersom vi gjer operasjonane i motsett retning?

**Resultat**

Dersom $\mathcal{L}(f)(s) = F(s)$ har vi

$$\mathcal{L}(tf(t))(s) = -F'(s) \qquad \text{og} \qquad \mathcal{L}^{-1}(F'(s))(t) = -tf(t).$$

For integrasjon har vi

$$\mathcal{L}\left(\frac{f(t)}{t}\right)(s) = \int_s^\infty F(v)\,dv \qquad \text{og} \qquad \mathcal{L}^{-1}\left(\int_s^\infty F(v)\,dv\right)(t) = \frac{f(t)}{t}.$$

- Desse formlane er nyttige når vi skal inverstransformere.
- Døme: Inverstransformer $\ln \frac{s}{s-1}$.