Løsningsforslag Øving 2

Martin Ludvigsen

September 3, 2020

Ting man lærer i denne øvingen

- Dirac delta funksjonea.
- Konvolusjoner.
- Løsninger av integralligninger ved hjelp av Laplace-transformasjonen.
- Egenskaper til den deriverte og integralet av Laplace-transformasjonen.
- Løsning av systemer av differensialligninger ved hjelp av Laplace-transformasjonen.

6.4

6.4.3

Som forrige øving bruker vi Laplace-transformasjonen for å løse ligningen. Vi får

$$\begin{aligned}
y'' + 9y &= \delta(t - \pi/2), y(0) = 2, y'(0) = 0 \\
s^2 Y - 2s + 9Y &= e^{-(\pi/2)s} \\
Y(s) &= \frac{1}{s^2+9}\left(e^{-(\pi/2)s} + 2s\right) \\
y(t) &= 2\cos(3t) + \cos(3(t - \pi/2))u(t - \pi/2).
\end{aligned}$$

Her brukes både tabell 1 og det andre skift-teoremet. En ting man kan merke seg er at en impuls i tid $t = \pi/2$ endrer løsningen all tid etter $t = \pi/2$. Dirac delta funksjonen og Heaviside funksjonen henger sammen.

6.4.11

Framgangsmåten er helt lik, men her må vi også transformere en Heaviside funksjon. Vi kan tolke høyresiden som noe som "slår inn" etter $t = 1$ og en enkelt hendelse i $t = 2$. Vi får

$$\begin{aligned}
y'' + 3y' + 2y &= u(t - 1) + \delta(t - 2), y(0) = 0, y'(0) = 1 \\
s^2 Y - 1 + 3sY + 2Y &= \frac{e^{-s}}{s} + e^{-2s} \\
Y(s) &= \frac{1}{(s+1)(s+2)}\left(1 + \frac{e^{-s}}{s} + e^{-2s}\right).
\end{aligned}$$

Etter delbrøksoppspalting får vi

$$Y(s) = \left(\frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2}\right)\left(1 + \frac{e^{-s}}{s} + e^{-2s}\right)$$

For det andre leddet bruker vi integrasjonstrikset fra forrige øving, altså at

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s(s-a)}\right) = \int_0^t e^{a\tau} d\tau = \frac{e^{at}-1}{a}.$$

Tilsammen får vi at løsningen er (og her er det viktig at man holder styr på eksponensialfunksjoner i funksjonsrom og laplace-rom)

$$y(t) = e^{-t} - e^{-2t} + u(t-1)\left(e^{-(t-1)} - 1 - \frac{e^{-2(t-1)} - 1}{2}\right) + u(t-2)\left(e^{-(t-2)} - e^{-2(t-2)}\right).$$

Her kan man og merke seg at det kan være nyttig å klumpe ledd sammen utifra hvilken tid de slår inn, altså hvilken heaviside funksjon de er ganget med.

6.4.14d

Sag-tann bølgen er et veldig kjent signal da dette er ganske enkelt å produsere i digitale kretset og enkelt å analysere [1]. Vi kan her burke transformasjonen til periodiske funksjoner, som er ligning (11) på samme side i Kreyzsig. Funksjonen vi skal finne transformen til er $y(t) = kt/p$, og transformasjonen blir

$$Y(s) = \frac{1}{1-e^{-ps}} \int_0^p e^{-st} kt/p dt = \frac{k(1-e^{-ps}(ps-1))}{ps^2}.$$

6.5

6.5.7

Når det kommer til konvolusjoner er et stort poeng at man kan regne dem ut fra definisjonen, eller ved å Laplace (eller Fourier) transformere begge funksjonen, gange de sammen (som nesten alltid er enklere enn å regne integralet i definisjonen til konvolusjon!) og transformere tilbake. Dette er nettop hva en konovlusjon er: **en konvolusjon er det som skjer i signalrom når man ganger i laplace-rom**. Vi bruker først definisjonen

$$t * e^{-t} = \int_0^t (t-\tau)e^{-\tau} d\tau = t + e^{-t} - 1.$$

Vi kan også transformere og gange sammen

$$\mathcal{L}(t * e^{-t}) = \mathcal{L}(t)\,\mathcal{L}(e^{-t}) = \frac{1}{s^2}\frac{1}{s+1} = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s} + \frac{1}{s+1}.$$

Invers transformen av dette gir samme resultat..

[1] Sagtann-bølger brukes ofte i Musikk og har en veldig kvass lyd, som ofte er brukt i elektronisk musikk . Strykeinstrumenter lager lyd som ligner på sagtann-bølger.

6.5.9

Vi skal nå løse en integrallikning, som kanskje ikke er kjent for alle fra før. Man kan merke seg at de ligner på differensiallikninger, og kan også løses med Laplace-transformasjonen. I dette tilfellet er integralet en konvolusjon mellom y og 1 (som er teorem 3 fra 6.2 (!)), med andre ord er

$$\mathcal{L}\left(\int_0^t y(\tau)dt\right) = \mathcal{L}(y)\,\mathcal{L}(1) = \frac{Y}{s}.$$

Vi transformerer ligningen og får

$$\begin{aligned} Y + \frac{Y}{s} &= \frac{2}{s} \\ Y(s) &= \frac{2}{s+1} \\ y(t) &= 2e^{-t}. \end{aligned}$$

6.5.13

Trikset her er å gjøre det andre leddet om til en konvolusjon ved å gange inn e^t, samt den første shift-regelen på høyresiden. Vi får

$$\begin{aligned} y(t) + 2\int_0^t y(\tau)e^{t-\tau}d\tau &= te^t \\ Y(s) + 2Y\frac{1}{s-1} &= \frac{1}{(s-1)^2} \\ &\vdots \\ y(t) &= \sinh(t). \end{aligned}$$

6.6

6.6.6

Vi har sett på hva som skjer med Laplace-transformasjonen når vi deriverer funksjoner, og nå skal vi se hva som skjer med funksjoner når vi deriverer Laplace-transformasjonen.

Vi bruker her derivasjonsegenskapen (ligning (1) på side 238 i Kreyzsig) først for å finne

$$\mathcal{L}(t\sin(3t)) = -\,\mathcal{L}(\sin(3t))' = -\left(\frac{3}{s^2+9}\right)' = \left(\frac{6s}{(s^2+9)^2}\right).$$

Vi har så at

$$\mathcal{L}(t^2\sin(3t)) = -\,\mathcal{L}(t\sin(3t))' = -\left(\frac{6s}{(s^2+9)^2}\right)' = -\left(\frac{6}{(s^2+9)^2} + \frac{12s^2}{(s^2+9)^3}\right).$$

6.6.17

Her tilbyr oppgaveteksten flere måter å løse oppgaven på. Vi ser at om vi deriverer transformasjonen får vi

$$\left(\log\left(\frac{s}{s-1}\right)\right)' = \frac{1}{s-s^2}$$

Lignende uttrykk har vi sett før, og vi vet at den inverse transformasjonen til høyresiden er $1 - e^t$. Vi kan så bruke ligning (6) på side 239 i Keryzsig, integrasjonsegenskapen og analysens fundamentalteorem til å ende opp med

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\log\left(\frac{s}{s-1}\right)\right) = \mathcal{L}^{-1}\left(\int_s^\infty \frac{1}{s-s^2}ds\right) = \frac{\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s-s^2}\right)}{t} = \frac{1-e^t}{t}.$$

6.7

6.7.4

Vi skal nå gjøre akkurat det samme som før, bare på et system av differensialligninger. Metoden er den samme: transformer, løs for de ukjente, transformer tilbake. Vi transformerer systemet i oppgaven og får

$$\begin{aligned} sY_1 &= 4Y_2 - 8\frac{s}{s^2+16} \\ sY_2 - 3 &= -3Y_1 - 9\frac{4}{s^2+16}. \end{aligned}$$

Merk at dette er et ulineært likningssystem, og lar seg ikke nødvendigvis løses enkelt. Vi setter inn den første linja i den andre linja og får

$$\begin{aligned} s^2Y_2 &= 3s - 3\left(4Y_2 - 8\frac{s}{s^2+16}\right) - \frac{36s}{s^2+16} \\ \implies (s^2+12)Y_2 &= 3s - \frac{12s}{s^2+16} \end{aligned}$$

Løs dette for Y_2 og transformer dette tilbake for å finne $y_2(t)$. Sett så Y_2 tilbake inn i likningssystemet, løs for Y_1 og transformer for å finne y_1.