

EKSAMEN i TMA4120, Matematikk 4K

**Problem 1** Bruk Laplacetransformasjonen til o finne  $y(t)$  når

$$y(t) + 3 \int_0^t y(\tau) d\tau = \delta(t - 5), \quad t \geq 0.$$

**Problem 2** Vi veit at løysinga  $u = u(x, t)$  til problemet

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & t \geq 0, 0 \leq x \leq \pi \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0, & t \geq 0 \end{cases}$$

er gitt av formelen

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-n^2 t} \sin(nx).$$

Anta at  $u(x, t)$ , i tillegg , har initialbetingelsen

$$u(x, 0) = 4(\sin(x))^3, \quad 0 \leq x \leq \pi.$$

Finn  $u(x, t)$ ! *Hint:*  $e^{ix}$ .

**Problem 3** Bestem konvergensradiusen til potensrekka

$$\frac{1}{z^2 + z + 1} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n.$$

**Problem 4a** Finn polane til funksjonen

$$g(z) = \frac{1 + e^{i\pi z}}{z(z + 1)^2}$$

og bestem ordninga deira.

**Problem 4b** Berekn integralet

$$\oint g(z) dz = ?$$

teka langs sirkelen  $|z + 1| = 5$ .

**Problem 5** La

$$v(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp(-\frac{|x-y|^2}{4t})}{1+y^2} dy.$$

Bestem

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} v(x, t) = ?$$

*Hint:* Ei partiell differensiallikning.

**Problem 6** La

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

ståfor Laplaceoperatoren. Anta at  $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$  er en analytisk funksjon. Er det sant at

$$\Delta(uv) = 0 ?$$

(Bevis eller moteksempel!)