EKSAMEN i TMA4120, Matematikk 4K

Problem 1 Bruk Laplacetransformasjonen til a finne $y(t)$ når

$$y(t) + 3\int_0^t y(\tau)\,d\tau \;=\; \delta(t-5), \qquad t \geq 0.$$

Problem 2 Vi vet at lϕsningerne $u = u(x,t)$ til problemet

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} \;=\; \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & t \geq 0,\ 0 \leq x \leq \pi \\ u(0,t) \;=\; u(\pi,t) \;=\; 0, & t \geq 0 \end{cases}$$

gis av formelen

$$u(x,t) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-n^2 t} \sin(nx).$$

Anta at $u(x,t)$, i tillegg , har initialbetingelsen

$$u(x,0) \;=\; 4\big(\sin(x)\big)^3, \qquad 0 \leq x \leq \pi.$$

Finn $u(x,t)$! *Hint:* e^{ix}.

Problem 3 Bestem konvergensradiusen til potensrekken

$$\frac{1}{z^2+z+1} \;=\; 1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n.$$

Problem 4a Finn funksjonens

$$g(z) \;=\; \frac{1+e^{i\pi z}}{z(z+1)^2}$$

poler og bestem deres ordning.

Problem 4b Beregn integralet

$$\oint g(z)\, dz \; = ?$$

tatt langs sirkelen $|z+1| = 5$.

Problem 5 La

$$v(x,t) \; = \; \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp(-\frac{|x-y|^2}{4t})}{1+y^2}\, dy.$$

Bestem

$$\lim_{t \to 0+} v(x,t) \; = ?$$

Hint: En partiell differensiallikning.

Problem 6 La

$$\Delta \; = \; \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

betegne Laplaceoperatoren. Anta at $f(z) = u(x,y) + i\, v(x,y)$ er en analytisk funksjon. Er det sant at

$$\Delta(uv) \; = \; 0 \; ?$$

(Bevis eller moteksempel!)