Oppgåve 1 La

$$g(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t < 1 \\ -1, & 1 \le t < 2 \\ 0, & 2 < t. \end{cases}$$

a) Finn laplacetransformasjonen av g.

b) Løys initialverdiproblemet

$$y''(t) + 4y(t) = g(t), \quad t \ge 0, \; y(0) = 0, \; y'(0) = 0.$$

Oppgåve 2 Betrakt randverdiproblemet:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, \; t > 0, \; 0 < x < 1 \\ u(0,t) = u(1,t) = 0 \end{cases}$$

a) Finn alle løysningar på forma $u(x,t) = F(t)G(x)$ som tilfredsstiller $G(0) = G(1) = 0$.

b) Bruk superposisjonsprinsippet til å finne løysninga på randverdiproblemet som oppfyller initialkondisjonen

$$u(x,0) = 3\sin(\pi x) + 5\sin(4\pi x), \quad 0 < x < 1.$$

Oppgåve 3 Rekn ut fouriertransformasjonen av funksjonen

$$f(x) = \begin{cases} e^{-2018x}, & x \ge 0 \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Oppgåve 4 Gå ut frå at $f(z)$ er ein analytisk funksjon definert på eit domene Ω som tilfredsstiller $|f(z)| = 1$ for alle $z \in \Omega$. Vis at f er ein konstantfunksjon.

Oppgåve 5 Bestem konvergensradiusen til taylorrekka til funksjonen

$$h(z) = \frac{2}{1 + \cosh(z)}$$

sentrert i origo. Grunngi svaret.

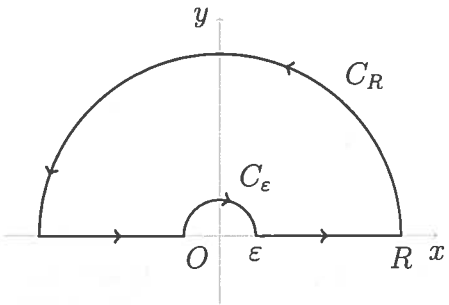
Oppgåve 6 La f være funksjonen

$$f(z) = \frac{\ln(z)}{z^2 + a^2}, \quad a > 0,$$

definert på den øvre halvdelen av planet. For $z = re^{i\theta}, 0 \leq \theta \leq \pi$ definer

$$\ln(z) = \ln(r) + i\theta.$$

Definer C til å være den følgande konturen:



a) Ved å bruke residuerekning finn verdien av $\oint_C f(z)\,dz$.

b) Vis at integrala over halvsirklane C_R og C_ε går mot null når $R \to \infty$ og $\varepsilon \to 0$.

c) Rekn ut

$$\int_0^\infty \frac{\ln(x)\,dx}{x^2 + a^2}.$$