Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Løsningsforslag — Øving 9

13.7.17

$$\begin{aligned}
\ln(i^2) &= \ln(-1) \\
&= \ln e^{i\pi} \\
&= \ln 1 + i(\pi + 2n\pi) \\
&= i(2n+1)\pi, \qquad n \in \mathbb{Z}, \\
2\ln i &= 2\ln e^{i\pi/2} \\
&= 2\left(\ln 1 + i(\pi/2 + 2n\pi)\right) \\
&= i(4n+1)\pi.
\end{aligned}$$

Dermed er for eksempel $\ln(i^2) \ni 3\pi i \notin 2\ln i$.

13.7.30e Vi må løse ligningen $\tan w = z$ for w:

$$\begin{aligned}
z = \tan w &= \frac{\sin w}{\cos w} \\
&= \frac{\frac{1}{2i}\left(e^{iw} - e^{-iw}\right)}{\frac{1}{2}\left(e^{iw} + e^{-iw}\right)} \\
&= \frac{1}{i}\frac{e^{2iw} - 1}{e^{2iw} + 1} \\
&\iff \\
zi(e^{2iw} + 1) &= e^{2iw} - 1 \\
&\iff \\
(zi - 1)e^{2iw} &= -(zi + 1) \\
&\iff \\
e^{2iw} &= \frac{-(zi+1)}{zi - 1} \\
&= \frac{i - z}{i + z} \\
&\iff \\
2iw &= \ln\left(\frac{i-z}{i+z}\right) \\
&\iff \\
w &= \frac{1}{2i}\ln\left(\frac{i-z}{i+z}\right) = \frac{i}{2}\ln\left(\frac{i+z}{i-z}\right)
\end{aligned}$$

Dermed er $\arctan z = w = \frac{i}{2}\ln\left(\frac{i+z}{i-z}\right)$.

13.Review.33 Vi skal finne $\tan(1+i) = \frac{\sin(1+i)}{\cos(1+i)}$. Vi bruker formlene for $\sin(z)$ og $\cos(z)$ på side 634, og får

$$\begin{aligned}
\tan(1+i) = \frac{\sin(1+i)}{\cos(1+i)} &= \frac{\sin 1 \cosh 1 + i \cos 1 \sinh 1}{\cos 1 \cosh 1 - i \sin 1 \sinh 1} \\
&= \frac{\sin 1 \cosh 1 + i \cos 1 \sinh 1}{\cos 1 \cosh 1 - i \sin 1 \sinh 1} \cdot \frac{\cos 1 \cosh 1 + i \sin 1 \sinh 1}{\cos 1 \cosh 1 + i \sin 1 \sinh 1} \\
&= \frac{(\sin 1 \cosh 1)(\cos 1 \cosh 1) - (\cos 1 \sinh 1)(\sin 1 \sinh 1)}{\cos^2 1 \cosh^2 1 + \sin^2 1 \sinh^2 1} \\
&\quad + i \frac{(\sin 1 \cosh 1)(\sin 1 \sinh 1) + (\cos 1 \sinh 1)(\sin 1 \sinh 1)}{\cos^2 1 \cosh^2 1 + \sin^2 1 \sinh^2 1} \\
&= \frac{(\sin 1 \cos 1)(\cosh^2 1 - \sinh^2 1)}{\cos^2 1 \cosh^2 1 + \sin^2 1 \sinh^2 1} + i \frac{(\sinh 1 \cosh 1)(\sin^2 1 + \cos^2 1)}{\cos^2 1 \cosh^2 1 + \sin^2 1 \sinh^2 1} \\
&= \frac{\sin 1 \cos 1}{\cos^2 1 \cosh^2 1 + \sin^2 1 \sinh^2 1} + i \frac{\sinh 1 \cosh 1}{\cos^2 1 \cosh^2 1 + \sin^2 1 \sinh^2 1} \\
&= \frac{\sin 1 \cos 1}{\cos^2 1 (1 + \sinh^2 1) + \sin^2 1 \sinh^2 1} + i \frac{\sinh 1 \cosh 1}{\cos^2 1 (1 + \sinh^2 1) + \sin^2 1 \sinh^2 1} \\
&= \frac{\sin 1 \cos 1}{\cos^2 1 + \sinh^2 1} + i \frac{\sinh 1 \cosh 1}{\cos^2 1 + \sinh^2 1}
\end{aligned}$$

I denne utregningen benyttes mange av identitetene for trigonometriske og hyperbolske funksjoner som nevnes i seksjon 13.6 i boka. Alternativt kan man referere til oppgave 13.6.20, og dermed spare en del triksing med formler.

14.1.7 Når t går fra 0 til 2, går $e^{\pi i t/4}$ langs enhetssirkelen fra 1 til i mot klokka. Dermed er kurven i oppgaven den delen av sirkelen med sentrum i 1 og radius 2 som ligger innenfor regionen $x \geq 1$, $y \geq 0$. Se figur under.

14.1.26 Ethvert enkeltsammenhengende definisjonsområde som inneholder enhetssirkelen vil inneholde $z = 0$. Siden z^{-1} ikke er analytisk i $z = 0$ betyr det at vi ikke kan bruke teorem 1 fra side 647. En mulig parametrisering av C er $\gamma(t) = e^{it}$ for $t \in [0, 2\pi)$. Da er $\dot{\gamma}(t) = ie^{it}$, og ved å bruke teorem 2 på side 647 får vi at

$$\begin{aligned}
\int_C (z + z^{-1})\,\mathrm{d}z &= \int_0^{2\pi} (e^{it} + e^{-it}) i e^{it}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{2\pi} (ie^{2it} + i)\,\mathrm{d}t \\
&= 2\pi i
\end{aligned}$$

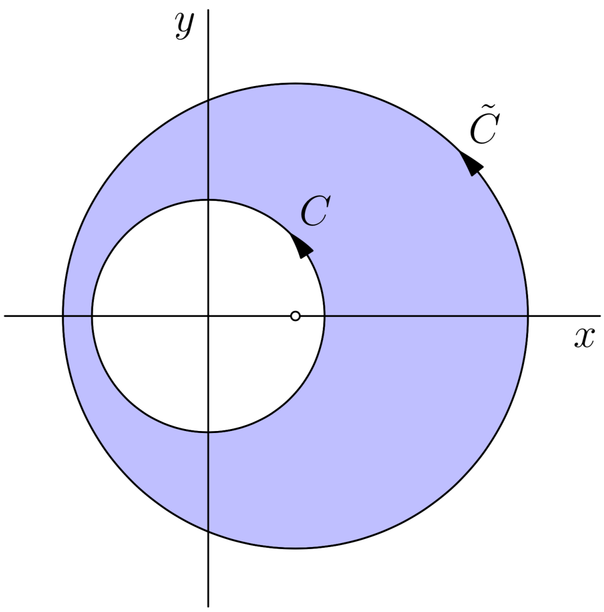
14.2.17 Funksjonen $f(z) = \frac{1}{|z|^2}$ er ikke analytisk innenfor enhetssirkelen, så vi kan ikke benytte oss av Cauchys integralteorem. For å regne ut integralet parametriserer vi enhetssirkelen som

$$C\colon z(t) = e^{it}, \qquad t \in [0, 2\pi)$$

og bruker at for $z = re^{it}$ har vi at $f(z) = \frac{1}{|z|^2} = \frac{1}{r^2}$. Dermed får vi at

$$\begin{aligned}\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z &= \int_0^{2\pi} f(z(t)) \cdot \dot{z}(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{r^2} \cdot rie^{it}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{i}{r}\int_0^{2\pi} e^{it}\,\mathrm{d}t = 0\end{aligned}$$

$\boxed{14.2.18}$ Cauchys integralteorem kan ikke brukes, siden $f(z) = \frac{1}{5z-1}$ ikke er analytisk i $z = \frac{1}{5}$ og dette punktet ligger innenfor enhetssirkelen $C\colon |z| = 1$. Vi skal regne ut integralet vha. et triks. La $\tilde{C}\colon |z - \frac{1}{5}| = 2$ (med positiv omløpsretning), dvs.



I området på og mellom C og $\tilde{C}$ er f analytisk og Cauchys integralteorem for områder med hull gir at

$$\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z = \oint_{\tilde{C}} f(z)\,\mathrm{d}z$$

Det siste integralet er enkelt å regne ut ved parametrisering:

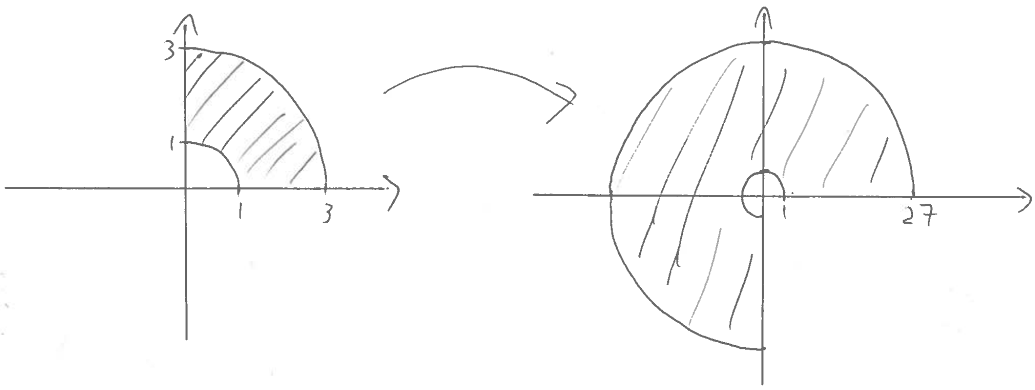
$$\tilde{C}\colon z(t) = \frac{1}{5} + 2e^{it}, \qquad t \in [0, 2\pi)$$

og

$$\oint_{\tilde{C}} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} f(z(t)) \cdot \dot{z}(t)\,\mathrm{d}t$$
$$= \int_0^{2\pi} \frac{1}{10e^{it}} \cdot 2ie^{it}\,\mathrm{d}t$$
$$= \frac{2\pi i}{5}$$

$\boxed{17.1.11}$ Regionen som er gitt i oppgaven er den delen av annulusen med indre radius 1, ytre radius 3 og sentrum i 0 som ligger i kvadranten $x > 0$, $y > 0$. La $z = re^{i\theta}$. Da er $w = z^3 = r^3 e^{3i\theta}$, så vi kan skrive $w = se^{i\phi}$ for $1 < s < 27$ og $0 < \phi < 3\pi/2$, så bildet av avbildningen ligger innenfor regionen disse ligningene beskriver. Vi kan se at bildet faktisk er hele denne regionen, for hvis $w_0 = s_0 e^{i\phi_0}$ tilfredsstiller $1 < s_0 < 27$ og $0 < \phi_0 < 3\pi/2$, så er $w_0 = (s_0^{1/3} e^{\phi_0 i/3})^3$, der $1 < s_0^{1/3} < 3$ og $0 < \phi_0/3 < \pi/2$. Se figur under.

17.1.11)



14.1.7)