Løsningsforslag — Øving 5

11.9.6 Bruker definisjonen av fouriertransformasjonen:

$$
\begin{aligned}
\hat{f}(w) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-iwx}\, dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|} e^{-iwx}\, dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{-\infty}^{0} e^{x} e^{-iwx}\, dx + \int_{0}^{\infty} e^{-x} e^{-iwx}\, dx \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\left[\frac{1}{1-iw} e^{(1-iw)x}\, dx \right]_{-\infty}^{0} + \left[\frac{1}{-1-iw} e^{(-1-iw)x}\, dx \right]_{0}^{\infty} \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{1-iw} - \frac{1}{-1-iw} \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{-1-iw-(1-iw)}{(1-iw)(-1-iw)} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{-2}{-1-w^2} \\
&= \frac{\sqrt{2}}{(1+w^2)\sqrt{\pi}}
\end{aligned}
$$

11.9.8

$$
\begin{aligned}
\hat{f}(w) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-iwx}\, dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^{0} x e^{-x} e^{-iwx}\, dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^{0} x e^{(-1-iw)x}\, dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\left[\frac{1}{-1-iw} x e^{(-1-iw)x} \right]_{-1}^{0} - \frac{1}{-1-iw} \int_{-1}^{0} e^{(-1-iw)x}\, dx \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(-\frac{1}{1+iw} e^{1+iw} - \frac{1}{(1+iw)^2} \left(1 - e^{(1+iw)} \right) \right) \\
&= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{1+iw} e^{1+iw} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{(1+iw)^2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{(1+iw)^2} e^{1+iw}
\end{aligned}
$$

$\boxed{\text{11.9.11}}$

$$
\begin{aligned}
\hat{f}(w) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-iwx}\,dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{-1}^{0} -e^{-iwx}\,dx + \int_{0}^{1} e^{-iwx}\,dx \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{1} (e^{-iwx} - e^{iwx})\,dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{1} -2i\sin(wx)\,dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{2i}{w} \cos(wx) \right]_{0}^{1} \\
&= \frac{i\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}w} (\cos w - 1)
\end{aligned}
$$

Her kan man naturligvis også evaluere de to integralene på linje to hver for seg.

$\boxed{\text{11.9.16 c)}}$

$$
\hat{f}(w) = \mathcal{F}(f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-iwx}\,dx
$$

$$
\begin{aligned}
\implies \qquad \mathcal{F}[e^{iax}f(x)] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{iax}e^{-iwx}\,dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i(w-a)x}\,dx \\
&= \hat{f}(w-a)
\end{aligned}
$$

$\boxed{\text{12.1.14 a)}}$ Deriverer og får

$$
\begin{aligned}
u_{tt} &= c^2 v''(x+ct) + c^2 w''(x-ct) \\
u_{xx} &= v''(x+ct) + w''(x-ct)
\end{aligned}
$$

ved kjerneregelen. Vi ser at $u(x,t)$ dermed løser (1).

$\boxed{12.1.15}$ Trivielt for $a = 0$, så anta $a \neq 0$.

$$\begin{aligned}
\frac{u_{xx} + u_{yy}}{a} &= \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\ln(x^2+y^2) + \frac{b}{a}\right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\ln(x^2+y^2) + \frac{b}{a}\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial x}(2x(x^2+y^2)^{-1}) + \frac{\partial}{\partial y}(2y(x^2+y^2)^{-1}) \\
&= 2(x^2+y^2)^{-1} + 2x(-2x)(x^2+y^2)^{-2} + 2(x^2+y^2)^{-1} + 2y(-2y)(x^2+y^2)^{-2} \\
&= \frac{2(x^2+y^2) - 4x^2 + 2(x^2+y^2) - 4y^2}{(x^2+y^2)^2} \\
&= 0
\end{aligned}$$

$x^2 + y^2 = 1$ gir $u(x, y) = a \ln 1 + b = b$, og $x^2 + y^2 = 100$ gir $u(x, y) = a \ln 100 + b$. Randbetingelsene impliserer altså $b = 110$ og $0 = a \ln 100 + b = a \ln 100 + 110$, som gir $a = -110/\ln 100$.

$\boxed{12.3.7}$ Vi må løse PDE-en

$$u_{tt} = u_{xx}$$

for $t \geq 0$ og $x \in [0, 1]$. Rand- og initialbetingelsene er henholdsvis

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \qquad u(x,0) = f(x), \qquad u_t(x,0) = 0.$$

Separasjon av variabler: Anta at vi kan skrive $u(x,t) = F(x)G(t)$. Da er

$$F''(x)G(t) = u_{xx} = u_{tt} = F(x)G''(t).$$

Dvs. $F''/F = G''/G =: -\mu^2 < 0$ konstant. (Man kan vise at positiv konstant bare vil gi trivielle løsninger). Dette gir ODE-ene

$$F''(x) = -\mu^2 F(x), \qquad G''(t) = -\mu^2 G(t)$$

Med generell løsning for F

$$F(x) = A\cos\mu x + B\sin\mu x$$

Nå er

$$0 = u(0,t) = F(0)G(t), \qquad 0 = u(1,t) = F(1)G(t)$$

som medfører at $F(0) = F(1) = 0$ dersom løsningen er ikketriviell. Altså er $0 = F(0) = A$ og

$$0 = F(1) = B\sin\mu,$$

så $\mu = n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$ og alle multipler av funksjonene

$$F_n(x) := \sin n\pi x, \qquad n \in \mathbb{N}$$

er løsninger av ODE-en for F med de gitte randbetingelsene.

Generelle løsninger for G er nå

$$G_n(t) := B_n \cos n\pi t + B_n^* \sin n\pi t$$

og løsningene som tilfredsstiller PDE-en og randbetingelsene er på formen

$$u_n(x,t) := G_n(t)F_n(x) = (B_n \cos n\pi t + B_n^* \sin n\pi t)\sin n\pi x, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Ettersom likningen er lineær, er summer av disse løsningene også løsninger. Vi setter

$$\begin{aligned} u(x,t) &:= \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (B_n \cos n\pi t + B_n^* \sin n\pi t)\sin n\pi x. \end{aligned}$$

Vi har

$$f(x) = kx(1-x) = u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin n\pi x.$$

Dvs. at B_n er sinus-Fourier-koeffisientene til f:

$$\begin{aligned} B_n &= \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,\mathrm{d}x \\ &= 2k\int_0^1 (x-x^2)\sin n\pi x\,\mathrm{d}x \\ &\vdots \\ &= \begin{cases} \frac{8k}{\pi^3 n^3}, & n \text{ odde} \\ 0, & n \text{ jevn.} \end{cases} \end{aligned}$$

Utregningene er gjort ved standard delvis integrasjon.

Vi finner at $B_n^* = 0$ for alle n fordi

$$0 = u_t(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} n\pi B_n^* \sin n\pi x.$$

Løsningen er nå gitt ved

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos n\pi t \sin n\pi x \\ &= \frac{8k}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^3}\cos((2n-1)\pi t)\sin((2n-1)\pi x). \end{aligned}$$

$\boxed{*}$ Vi har $\widehat{f(3x+5)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(3x+5)e^{-iwx}\,dx$. La $y = 3x+5$. Vi kan da skifte variabel i integralet med $dy = 3dx$ og får

$$\begin{aligned} \widehat{f(3x+5)} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{-iw(y-5)/3}\,\frac{dy}{3} \\ &= \frac{1}{3}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{-iwy/3}e^{iw5/3}\,dy \\ &= \frac{e^{iw5/3}}{3}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{-i(w/3)y}\,dy \\ &= \frac{e^{iw5/3}}{3}\hat{f}\left(\frac{w}{3}\right) \end{aligned}$$