



16.4.4 Vi skal regne ut integralet

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos \theta}{13 - 12 \cos 2\theta} d\theta.$$

Vi har at

$$\begin{aligned}\cos \theta &= \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right) \\ \cos 2\theta &= \frac{1}{2} \left(z^2 + \frac{1}{z^2} \right) \\ d\theta &= \frac{dz}{iz}.\end{aligned}$$

Dette gir

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos \theta}{13 - 12 \cos 2\theta} d\theta = \oint_C \frac{\frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)}{13 - 6 \left(z^2 + \frac{1}{z^2} \right)} \cdot \frac{dz}{iz} = \oint_C \frac{z^2 + 1}{2i(13z^2 - 6z^4 - 6)} dz.$$

Finner polene:

$$13z_0^2 - 6z_0^4 - 6 = 0 \implies z_0 = \pm \sqrt{\frac{2}{3}} \text{ eller } z_0 = \pm \sqrt{\frac{3}{2}}$$

Av disse er det kun $z_0 = \pm \sqrt{\frac{2}{3}}$ som er innenfor enhetssirkelen. Regner ut residylene for $z_0 = \pm \sqrt{\frac{2}{3}}$:

$$\operatorname{Res} f(z) = \operatorname{Res}_{z=z_0} \frac{p(z)}{q(z)} = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)} = \frac{z_0^2 + 1}{2i(26z_0 - 24z_0^3)} = \pm \frac{\sqrt{6}}{24i}$$

Fra residyteoremet får vi dermed at

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \frac{\cos \theta}{13 - 12 \cos 2\theta} d\theta &= \oint_C \frac{z^2 + 1}{2i(13z^2 - 6z^4 - 6)} dz \\ &= 2\pi i \sum_{j=1}^4 \operatorname{Res}_{z=z_j} f(z) \\ &= 2\pi i \left(\frac{\sqrt{6}}{24i} - \frac{\sqrt{6}}{24i} \right) \\ &= 0\end{aligned}$$

16.4.10 Skal finne cauchyprinsippalverdien til

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4 + 3x^2 - 4}$$

Finner nullpunktene til $x^4 = 3x^2 - 4$:

$$\begin{aligned} \text{Substituer } y = x^2 &\implies y^2 + 3y - 4 = 0 \\ &\implies y_1 = 1, y_2 = -4 \\ &\implies x_1 = -1 \in \mathbb{R} \\ &\quad x_2 = 1 \in \mathbb{R} \\ &\quad x_3 = 2i \quad \text{Øvre halvplan} \\ &\quad x_4 = -2i \quad \text{Nedre halvplan} \end{aligned}$$

Nå bruker vi formel (14) fra s. 732 i boka:

$$\text{pr. v. } \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum \text{Res } f(z) + \pi i \sum \text{Res } f(z)$$

hvor den første summen tas over alle poler i øvre halvplan, og den andre over alle poler på den reelle aksene. Dermed får vi

$$\begin{aligned} \text{pr. v. } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4 + 3x^2 - 4} &= 2\pi i \sum \text{Res} \frac{1}{x^4 + 3x^2 - 4} + \pi i \sum \text{Res} \frac{1}{x^4 + 3x^2 - 4} \\ &= 2\pi i \text{Res}_{z=2i} \frac{1}{x^4 + 3x^2 - 4} + \pi i \text{Res}_{z=-1} \frac{1}{x^4 + 3x^2 - 4} + \pi i \text{Res}_{z=1} \frac{1}{x^4 + 3x^2 - 4} \\ &= 2\pi i \left(-\frac{1}{20i} \right) + \pi i \left(-\frac{1}{10} + \frac{1}{10} \right) \\ &= -\frac{\pi}{10}. \end{aligned}$$

Her har vi brukt at

$$\begin{aligned} \text{Res}_{z=2i} \left(\frac{1}{x^4 + 3x^2 - 4} \right) &= \left[\frac{1}{4x^3 + 6x} \right]_{z=2i} = \frac{1}{-32i + 12i} = \frac{1}{-20i} \\ \text{Res}_{z=-1} \left(\frac{1}{x^4 + 3x^2 - 4} \right) &= \left[\frac{1}{4x^3 + 6x} \right]_{z=-1} = \frac{1}{-4 - 6} = -\frac{1}{10} \\ \text{Res}_{z=1} \left(\frac{1}{x^4 + 3x^2 - 4} \right) &= \left[\frac{1}{4x^3 + 6x} \right]_{z=1} = \frac{1}{4 + 6} = \frac{1}{10} \end{aligned}$$

Problem 5 Legg merke til at $h(z)$ er forholdet mellom to analytiske funksjoner $f(z) = 2$ og $g(z) = 1 + \cosh(z)$. Funksjonen $g(z)$ er ikke null i origo, så h er analytisk i origo. Det betyr at taylorrekka til h rundt origo konvergerer i den største disken med sentrum i origo som oppfyller at h er analytisk på hele disken. For å avgjøre radien til denne disken bør vi regne ut avstanden fra origo til det nærmeste singulære punktet til h . De singulære punktene til h er nullpunktene til $g(z)$. vi løser

$$1 + \cosh(z) = 0 \iff e^z = -1.$$

La $z = x + iy$ slik at $e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$. Da vil $e^z = -1$ bety at $x = 0$ og $y = \pi + 2\pi k$ hvor k er et heltall. De nullpunktene til g som er nærmest origo er $i\pi$ og $-i\pi$. Dermed får vi at taylorrekka til h med sentrum i origo har konvergensradius π .

Problem 6 a)

Vi begynner med å finne de singulære punktene til f som ligger i øvre halvplan. Det er kun ett, nemlig $z_0 = ia$. Dersom $R < a$ og konturen ikke inneholder det singulære punktet er integralet lik null. Dersom $R > a$ gir residyteoremet at

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i \operatorname{Res}_{ia} f(z).$$

Siden $f(z)$ har en enkel pol i ia får vi at

$$\operatorname{Res}_{ia} f(z) = \frac{\ln(ia)}{ia + ia} = \frac{\ln a + i\pi/2}{2ia}.$$

Dermed får vi at

$$\oint_C f(z) dz = \frac{\pi(2 \ln a + i\pi)}{2a}.$$

b)

Vi ser først på integralet over C_R . For $|z| = R$ har vi at

$$\left| \frac{\ln(z)}{z^2 + a^2} \right| \leq \frac{\ln(R) + \pi}{R^2 - a^2}.$$

Videre får vi, ved å integrere over halvsirkelen med radius R , at

$$\left| \int_{C_r} f(z) dz \right| \leq \frac{\pi R(\ln(R) + \pi)}{R^2 - a^2} \rightarrow 0, \quad R \rightarrow \infty.$$

For liten ε ser vi at $|z| = \varepsilon$ gir

$$\left| \frac{\ln(z)}{z^2 + a^2} \right| \leq \frac{|\ln \varepsilon| + \pi}{a^2 - \varepsilon^2}$$

og integralet er begrenset av

$$\frac{\pi\varepsilon(|\ln \varepsilon| + \pi)}{a^2 - \varepsilon^2} \rightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

c)

Vi har at

$$\int_{-\infty}^0 \frac{\ln x dx}{x^2 + a^2} + \int_0^{\infty} \frac{\ln x dx}{x^2 + a^2} = \lim_{R \rightarrow \infty, \varepsilon \rightarrow 0} \oint_C f(z) dz = \frac{\pi(2 \ln a + i\pi)}{2a}.$$

Imidlertid er det slik at $\ln x = \ln|x| + i\pi$ for $x < 0$, som betyr at

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln x dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(\frac{\pi(2 \ln a + i\pi)}{2a} \right) = \frac{\pi \ln a}{2a}.$$