Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Løsningsforslag — Øving 13

16.4.4 Vi skal regne ut integralet

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos\theta}{13 - 12\cos 2\theta}\,\mathrm{d}\theta.$$

Vi har at

$$\begin{aligned}\cos\theta &= \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})\\ \cos 2\theta &= \frac{1}{2}(z^2 + \frac{1}{z^2})\\ \mathrm{d}\theta &= \frac{\mathrm{d}z}{iz}.\end{aligned}$$

Dette gir

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos\theta}{13 - 12\cos 2\theta}\,\mathrm{d}\theta = \oint_C \frac{\frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})}{13 - 6(z^2 + \frac{1}{z^2})} \cdot \frac{\mathrm{d}z}{iz} = \oint_C \frac{z^2 + 1}{2i(13z^2 - 6z^4 - 6)}\,\mathrm{d}z.$$

Finner polene:

$$13z_0^2 - 6z_0^4 - 6 = 0 \implies z_0 = \pm\sqrt{\frac{2}{3}} \text{ eller } z_0 = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$$

Av disse er det kun $z_0 = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$ som er innenfor enhetssirkelen. Regner ut residyene for $z_0 = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$:

$$\operatorname{Res} f(z) = \operatorname*{Res}_{z=z_0} \frac{p(z)}{q(z)} = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)} = \frac{z_0^2 + 1}{2i(26z_0 - 24z_0^3)} = \pm\frac{\sqrt{6}}{24i}$$

Fra residyteoremet får vi dermed at

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \frac{\cos\theta}{13 - 12\cos 2\theta}\,\mathrm{d}\theta &= \oint_C \frac{z^2 + 1}{2i(13z^2 - 6z^4 - 6)}\,\mathrm{d}z\\ &= 2\pi i \sum_{j=1}^{4} \operatorname*{Res}_{z=z_j} f(z)\\ &= 2\pi i \left(\frac{\sqrt{6}}{24i} - \frac{\sqrt{6}}{24i}\right)\\ &= 0\end{aligned}$$

$\boxed{16.4.10}$ Skal finne cauchyprinsipalverdien til

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^4 + 3x^2 - 4}$$

Finner nullpunktene til $x^4 = 3x^2 - 4$:

$$\begin{aligned}
\text{Substituer } y = x^2 &\implies y^2 + 3y - 4 = 0 \\
&\implies y_1 = 1,\ y_2 = -4 \\
&\implies x_1 = -1 \in \mathbb{R} \\
&\qquad x_2 = 1 \in \mathbb{R} \\
&\qquad x_3 = 2i \quad \text{Øvre halvplan} \\
&\qquad x_4 = -2i \quad \text{Nedre halvplan}
\end{aligned}$$

Nå bruker vi formel (14) fra s. 732 i boka:

$$\text{pr. v.} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\pi i \sum \operatorname{Res} f(z) + \pi i \sum \operatorname{Res} f(z)$$

hvor den første summen tas over alle poler i øvre halvplan, og den andre over alle poler på den reelle aksen. Dermed får vi

$$\begin{aligned}
\text{pr. v.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^4 + 3x^2 - 4} &= 2\pi i \sum \operatorname{Res} \frac{1}{x^4 + 3x^2 - 4} + \pi i \sum \operatorname{Res} \frac{1}{x^4 + 3x^2 - 4} \\
&= 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=2i} \frac{1}{x^4 + 3x^2 - 4} + \pi i \operatorname*{Res}_{z=-1} \frac{1}{x^4 + 3x^2 - 4} + \pi i \operatorname*{Res}_{z=1} \frac{1}{x^4 + 3x^2 - 4} \\
&= 2\pi i \left(-\frac{1}{20i}\right) + \pi i \left(-\frac{1}{10} + \frac{1}{10}\right) \\
&= -\frac{\pi}{10}.
\end{aligned}$$

Her har vi brukt at

$$\begin{aligned}
\operatorname*{Res}_{z=2i} \left(\frac{1}{x^4 + 3x^2 - 4}\right) &= \left[\frac{1}{4x^3 + 6x}\right]_{z=2i} = \frac{1}{-32i + 12i} = \frac{1}{-20i} \\
\operatorname*{Res}_{z=-1} \left(\frac{1}{x^4 + 3x^2 - 4}\right) &= \left[\frac{1}{4x^3 + 6x}\right]_{z=-1} = \frac{1}{-4 - 6} = -\frac{1}{10} \\
\operatorname*{Res}_{z=1} \left(\frac{1}{x^4 + 3x^2 - 4}\right) &= \left[\frac{1}{4x^3 + 6x}\right]_{z=1} = \frac{1}{4 + 6} = \frac{1}{10}
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{Problem 5}}$ Legg merke til at $h(z)$ er forholdet mellom to analytiske funksjoner $f(z) = 2$ og $g(z) = 1 + \cosh(z)$. Funksjonen $g(z)$ er ikke null i origo, så h er analytisk i origo. Det betyr at taylorrekka til h rundt origo konvergerer i den største disken med sentrum i origo som oppfyller at h er analytisk på hele disken. For å avgjøre radien til denne disken bør vi regne ut avstanden fra origo til det nærmeste singulære punktet til h. De singulære punktene til h er nullpunktene til $g(z)$. vi løser

$$1 + \cosh(z) = 0 \iff e^z = -1.$$

La $z = x + iy$ slik at $e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$. Da vil $e^z = -1$ bety at $x = 0$ og $y = \pi + 2\pi k$ hvor k er et heltall. De nullpunktene til g som er nærmest origo er $i\pi$ og $-i\pi$. Dermed får vi at taylorrekka til h med sentrum i origo har konvergensradius π.

Problem 6 **a)**

Vi begynner med å finne de singulære punktene til f som ligger i øvre halvplan. Det er kun ett, nemlig $z_0 = ia$. Dersom $R < a$ og konturen ikke inneholder det singulære punktet er integralet lik null. Dersom $R > a$ gir residyteoremet at

$$\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i \operatorname*{Res}_{ia} f(z).$$

Siden $f(z)$ har en enkel pol i ia får vi at

$$\operatorname*{Res}_{ia} f(z) = \frac{\ln(ia)}{ia + ia} = \frac{\ln a + i\pi/2}{2ia}.$$

Dermed får vi at

$$\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z = \frac{\pi(2\ln a + i\pi)}{2a}.$$

b)

Vi ser først på integralet over C_R. For $|z| = R$ har vi at

$$\left|\frac{\ln(z)}{z^2 + a^2}\right| \leq \frac{\ln(R) + \pi}{R^2 - a^2}.$$

Videre får vi, ved å integrere over halvsirkelen med radius R, at

$$\left|\int_{C_r} f(z)\,\mathrm{d}z\right| \leq \frac{\pi R(\ln(R) + \pi)}{R^2 - a^2} \to 0, \quad R \to \infty.$$

For liten ε ser vi at $|z| = \varepsilon$ gir

$$\left|\frac{\ln(z)}{z^2 + a^2}\right| \leq \frac{|\ln\varepsilon| + \pi}{a^2 + \varepsilon^2}$$

og integralet er begrenset av

$$\frac{\pi\varepsilon(|\ln\varepsilon| + \pi)}{a^2 - \varepsilon^2} \to 0, \quad \varepsilon \to 0.$$

c)

Vi har at

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{\ln x\,\mathrm{d}x}{x^2 + a^2} + \int_0^\infty \frac{\ln x\,\mathrm{d}x}{x^2 + a^2} = \lim_{R\to\infty,\epsilon\to 0} \oint_C f(z)\,\mathrm{d}z = \frac{\pi(2\ln a + i\pi)}{2a}.$$

Imidlertid er det slik at $\ln x = \ln|x| + i\pi$ for $x < 0$, som betyr at

$$\int_0^\infty \frac{\ln x\,\mathrm{d}x}{x^2 + a^2} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\frac{\pi(2\ln a + i\pi)}{2a}\right) = \frac{\pi\ln a}{2a}.$$