Noregs teknisk–naturvitskaplege universitet
Institutt for matematiske fag

TMA4120 Matematikk 4K Haust 2018

Løysingsforslag – Øving 7

* Laplacelikninga i polarkoordinatar er

$$u_{rr} + \frac{u_r}{r} + \frac{u_{\theta\theta}}{r^2} = 0. \tag{0.1}$$

(Utleiinga av formelen er i 12.10 i boka.) Forslaget $u(x, y) = a \ln(x^2 + y^2) + b$ til løysing i oppgåva blir til $u(r, \theta) = a \ln(r^2) + b = 2a \ln(r) + b$ i polarkoordinatar, sidan $r^2 = x^2 + y^2$. Sjekkar at dette er ei løysing av (0.1):

$$\begin{aligned} u_{rr} + \frac{u_r}{r} + \frac{u_{\theta\theta}}{r^2} &= -\frac{2a}{r^2} + \frac{2a}{r^2} + 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Randkrava i polarkoordinatar er $u = 110$ for $r^2 = 1$ og $u = 0$ for $r^2 = 100$. Det gir umiddelbart

$$\begin{aligned} 110 &= a \ln(1) + b = b \\ 0 &= a \ln(100) + b = 2a \ln(10) + 110 \\ \implies a &= -\frac{55}{\ln(10)}, \end{aligned}$$

som gir oss løysinga vi vil ha.

Når vi samanliknar dette med løysinga av 12.1.15 i forrige øving, der vi ikkje brukte polarkoordinatar, ser vi at utrekningane vart mykje enklare då vi skulle sjekke at løysinga vår oppfylte (0.1). Grunnen til dette er at randkrava gir oss ei løysing som er konstant på sirklar om origo, og ei slik løysing er betre å jobbe med på polarkoordinatar.

12.4.19 Vi antek at vi kan skrive $u(x, t) = F(x)G(t)$ – der F og G ikkje er identisk lik 0 – og finn som vanleg ODE-ane

$$\frac{F''}{F} = -\mu^2 = \frac{G''}{c^2 G}. \tag{0.2}$$

Den generelle forma til F er

$$F(x) = A \cos \mu x + B \sin \mu x.$$

Randkrava gir

$$\begin{aligned} 0 &= u(0,t) \\ &= F(0)G(t) \\ \implies 0 &= F(0) = A. \qquad \text{Og} \\ 0 &= u_x(L,t) \\ &= F'(L)G(t) \\ \implies 0 &= F'(L) \\ &= \big|_{x=L} - \mu A \sin(\mu x) + \mu B \cos(\mu x) \\ &= \mu B \cos(\mu L) \\ \implies \mu L &= \pi/2 + n\pi, \qquad n \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Altså, alle F på forma

$$F_n(x) = B \sin(p_n x), \qquad p_n := \mu = \frac{\pi/2 + n\pi}{L} = \frac{(2n+1)\pi}{2L}$$

vil løyse ODE-en for F i (0.2) og tilfredsstille randkrava.

Den generelle forma til G er no

$$G(t) = C \cos(cp_n t) + D \sin(cp_n t)$$

og initialkrava gir

$$\begin{aligned} 0 &= u_t(x,0) \\ &= F(x)G'(0) \\ \implies 0 &= G'(0) \\ &= \big|_{t=0} - cp_n C \sin(cp_n t) + cp_n D \cos(cp_n t) \\ &= cp_n D. \end{aligned}$$

Dvs. $D = 0$.

Vi har no at alle u på forma

$$u_n(x,t) = F_n(x)G_n(t) = B_n \sin(p_n x) \cdot C_n \cos(cp_n t) =: A_n \sin(p_n x) \cdot \cos(cp_n t)$$

– der A_n er vilkårlege konstantar – vil vere løysingar. Ei uniformt konvergerende rekke vil tilfredsstille det same fordi

$$\begin{aligned} \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n\right)_{xx} - c^2 \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n\right)_{tt} &= \sum_{n=0}^{\infty} (u_n)_{xx} - c^2 \sum_{n=0}^{\infty} (u_n)_{tt} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left((u_n)_{xx} - c^2 (u_n)_{tt}\right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} 0 = 0, \end{aligned}$$

og fordi

$$\Big|_{t=0} \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t)\right)_t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial}{\partial t} u_n(x,0) = 0,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(0,t) = 0$$

og

$$\Big|_{x=L} \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t) \right)_x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x} u_n(L,t) = 0.$$

Det gjenstår derfor å finne A_n-ane slik at initialkravet held:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \sin \frac{(2n+1)\pi}{2L} x. \tag{0.3}$$

Vi ser av dette at f si utviding til $\mathbb{R}$ er odde og har periode $4L$: Dette er fordi fundamentalperioden p til f er lik fundamentalperioden til det første leddet $n = 0$, så

$$\begin{aligned} \sin \frac{\pi x}{2L} &= \sin \frac{\pi(x+p)}{2L} \\ &= \sin\left(\frac{\pi}{2L} x + \frac{\pi}{2L} p \right), \\ \iff \frac{\pi}{2L} p &= 2k\pi, \qquad k \in \mathbb{Z}, \\ \iff p &= 4Lk \end{aligned}$$

og det minste positive talet på denne forma er $4L$.

Definer koeffisientane $b_{2n+1} := A_n$, $b_{2n} := 0$ for $n = 0, 1, 2, \ldots$. Vi ser då at

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \sin \frac{(2n+1)\pi x}{2L} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{2L}$$

er fourier-sinus-rekka til f. Dei odde koeffisientane er dermed

$$\begin{aligned} A_n = b_{2n+1} &= \frac{2}{2L} \int_0^{2L} f(x) \sin \frac{(2n+1)\pi x}{2L} \, \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{L} \int_0^{2L} f(x) \sin \frac{(2n+1)\pi x}{2L} \, \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Dette er berre nesten det vi vil vise. Vi er i mål viss integranden er symmetrisk om $x = L$. Vi viser først at funksjonene

$$x \mapsto \sin \frac{(2n+1)\pi(x+L)}{2L}$$

er jamne:

$$\begin{aligned} \sin \frac{(2n+1)\pi(\pm x + L)}{2L} &= \sin\left(\frac{(2n+1)\pi(\pm x)}{2L} + \frac{(2n+1)\pi}{2} \right) \\ &= \sin\left(\frac{(2n+1)\pi}{2L} (\pm x) \right) \cos\left(\frac{(2n+1)\pi}{2} \right) \\ &\quad + \cos\left(\frac{(2n+1)\pi}{2L} (\pm x) \right) \sin\left(\frac{(2n+1)\pi}{2} \right) \\ &= 0 + \cos\left(\frac{(2n+1)\pi}{2L} (\pm x) \right) \cdot (-1)^n \end{aligned}$$

som er uavhengig av forteiknet til x. Ok.

Frå rekkerepresentasjonen til f ser vi at dette medfører at også $f(x+L)$ er jamn. Dermed er den følgande integranden symmetrisk om L, og

$$\begin{aligned} A_n = b_{2n+1} &= \frac{1}{L}\int_0^{2L} f(x)\sin\frac{(2n+1)\pi x}{2L}\,\mathrm{d}x, \qquad \text{SUB: } x = y+L \\ &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(y+L)\sin\frac{(2n+1)\pi(y+L)}{2L}\,\mathrm{d}y \\ &= \frac{2}{L}\int_{-L}^{0} f(y+L)\sin\frac{(2n+1)\pi(y+L)}{2L}\,\mathrm{d}y, \qquad \text{SUB: } x = y+L \\ &= \frac{2}{L}\int_0^{L} f(x)\sin\frac{(2n+1)\pi x}{2L}\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

som er det vi skulle vise.

12.6.21 Oppgitte krav:

$$u(0,y) = u(a,y) = u(x,0) = 0, \qquad \text{og} \qquad u(x,a) = 25, \qquad \text{med } a = 24$$

Steady-state temperatur vil seie at temperaturen ikkje lenger endrar seg med tida: $u_t = 0$. Varmeleiingslikninga i to dimensjonar blir dermed

$$\begin{aligned} \nabla^2 u &= 0 \\ u_{xx} + u_{yy} &= 0, \qquad (1) \end{aligned}$$

som er Laplaces likning. Bruker seperasjon av variablar:

$$u(x,y) = F(x)G(y)$$

Innsett i (1):

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}^2F}{\mathrm{d}x^2}G + F\frac{\mathrm{d}^2G}{\mathrm{d}y^2} &= 0 \\ \frac{1}{F}\frac{\mathrm{d}^2F}{\mathrm{d}x^2} = -\frac{1}{G}\frac{\mathrm{d}^2G}{\mathrm{d}y^2} &= k \qquad \text{(en konstant)} \end{aligned}$$

Vi har dermed to ordinære differensiallikningar:

$$F'' - kF = 0, \qquad\qquad G'' + kG = 0$$

Med $k = \mu^2 > 0$:

$$F(x) = C_1\mathrm{e}^{\mu x} + C_2\mathrm{e}^{-\mu x}$$

Initialkrava $u(0,y) = u(a,y) = 0$ gir $C_1 = C_2 = 0$.

Med $k = 0$:

$$F(x) = C_3 x + C_4$$

Initialkrava $u(0,y) = u(a,y) = 0$ gir $C_3 = C_4 = 0$.

Med $k = -\mu^2 < 0$:

$$F(x) = C_5 \cos(\mu x) + C_6 \sin(\mu x)$$

Initialkrava $u(0, y) = 0$ gir:

$$\begin{aligned} C_5 \cos 0 + C_6 \sin 0 &= 0 \\ C_5 &= 0 \end{aligned}$$

Initialkrava $u(a, y) = 0$ gir:

$$\begin{aligned} C_6 \sin(\mu a) &= 0 \\ \mu a &= n\pi \\ \mu &= \frac{n\pi}{a} \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, ... \end{aligned}$$

$$F(x) = C_6 \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)$$

Med $k = -\mu^2$ blir likninga for $G(y)$:

$$G'' - \mu^2 G = 0$$

Med løysing

$$G(y) = C_7 \mathrm{e}^{\mu y} + C_8 \mathrm{e}^{-\mu y}$$

Initialkravet $u(x, 0) = 0$ gir $C_8 = -C_7$:

$$\begin{aligned} G(y) &= C_7 \left(\mathrm{e}^{\mu y} - \mathrm{e}^{-\mu y}\right) \\ &= 2C_7 \sinh(\mu y) \\ &= 2C_7 \sinh\left(\frac{n\pi y}{a}\right) \end{aligned}$$

For kvar einaste n får vi dermed ei løysing:

$$u_n(x, y) = C_9 \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sinh\left(\frac{n\pi y}{a}\right)$$

No er framleis $n = 0, \pm 1, \pm 2$, men sidan u_n er odde mtp n (som betyr at u_{-n} er proporsjonal med u_n) held det å summere $u(x, y)$ for berre positive n. Løysinga for $n = 0$ er $u = 0$, som ikkje er særleg interessant.

Generell løysing:

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sinh\left(\frac{n\pi y}{a}\right)$$

Bruker siste krav $u(x,a) = 25$:

$$25 = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sinh(n\pi)$$

$$\begin{aligned}
B_n \sinh(n\pi) &= \frac{2}{a} \int_0^a 25 \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \mathrm{d}x \\
\frac{B_n \sinh(n\pi) a}{50} &= \left[\frac{-a}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\right]_0^a \\
\frac{B_n \sinh(n\pi)}{50} &= \frac{1}{n\pi}(1 - (-1)^n) \\
B_n &= \frac{50}{n\pi \sinh(n\pi)}(1 - (-1)^n)
\end{aligned}$$

som gir løysinga

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{50}{n\pi \sinh(n\pi)}(1 - (-1)^n) \sinh\left(\frac{n\pi y}{24}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{24}\right)$$

12.6.23 På same måte som i forrige oppgåve prøver vi først å finne funksjonar $u_n(x,y) = F_n(x)G_n(y)$ som løyser problemet

$$u_{xx} + u_{yy} = 0,\ u_y(x,a) = 0,\ u_y(x,0) = 0,\ u(0,y) = 0. \tag{0.4}$$

ODE-en for G i

$$\frac{F''}{F} = -\frac{G''}{G} =: k, \qquad \text{konstant.}$$

vil gi ikkjetrivielle løysingar viss og berre viss $k \geq 0$. For $k = \mu^2 > 0$ får vi

$$G(y) = A\sin(\mu y) + B\cos(\mu y).$$

Det nedre og øvre randkravet vil gi løysingar for G på forma

$$G_n(y) = B_n \cos(\mu_n y), \qquad \mu_n = \frac{n\pi}{a}.$$

ODE-en for F og det venstre randkravet vil gi løysingar på forma

$$F_n(x) = A_n \sinh(\mu_n x)$$

og dermed er funksjonene

$$u_n(x,y) = F_n(x)G_n(y) = A_n \sinh(\mu_n x)\cos(\mu_n y), \qquad n = 0, 1, \ldots$$

og alle lineærkombinasjonar av desse er løysingar av (0.4).

I tilegg har vi følgande for $k = 0$:

$$\begin{aligned}
& F''(x) = 0 \\
\implies\ & F(x) = Cx + C' \\
& G''(y) = 0 \\
\implies\ & G(y) = Dy + D'
\end{aligned}$$

for konstantar C, C', D og D'. $u_y(x,0) = 0$ gir $D = 0$, og $u(0,y) = 0$ gir $C' = 0$. Vi står dermed igjen med ei løysing

$$u_0(x,y) = F(x)G(y) = A_0 x,$$

der $A_0 = CD'$.

La $u = \sum u_n$, og den siste grensebetingelsen gir

$$f(y) = u(a,y) = A_0 a + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sinh(n\pi)\cos(\mu_n y).$$

Dermed er $A_n^* := A_n \sinh(n\pi)$ og $A_0 a$ cosinus-fourier-koeffisientane til f. Dvs.

$$A_0 a = \frac{1}{a}\int_0^a f(y)\mathrm{d}y$$
$$A_n^* = \frac{2}{a}\int_0^a f(y)\cos\frac{n\pi y}{a}\,\mathrm{d}y.$$

Løysinga er altså

$$u(x,y) = A_0 x + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sinh\frac{n\pi x}{24}\cos\frac{n\pi y}{24}$$

der

$$A_n = \frac{A_n^*}{\sinh(n\pi)} = \frac{2}{24\sinh(n\pi)}\int_0^{24} f(y)\cos\frac{n\pi y}{24}\,\mathrm{d}y$$

og

$$A_0 = \frac{1}{a^2}\int_0^a f(y)\mathrm{d}y.$$

12.7.4

$$f(x) = e^{-|x|}$$
$$u(x,t) = \int_0^{\infty} [A(p)\cos(px) + B(p)\sin(px)]e^{-c^2p^2t}\,dp$$
$$\implies f(x) = u(x,0) = \int_0^{\infty} [A(p)\cos(px) + B(p)\sin(px)]\,dp$$

Vi ser dette er eit fourierintegral:

$$\begin{aligned}
A(p) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|v|}\cos(pv)\,dv \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{0} e^{v}\cos(pv)\,dv + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} e^{-v}\cos(pv)\,dv \\
&= \frac{1}{\pi}\left([e^{v}\cos(pv)]_{-\infty}^{0} + \int_{-\infty}^{0} e^{v}p\sin(pv)\,dv - \left[e^{-v}\cos(pv)\right]_{0}^{\infty} - \int_{0}^{\infty} e^{-v}p\sin(pv)\,dv\right) \\
&= \frac{1}{\pi}\left(1+1+[e^{v}p\sin(pv)]_{-\infty}^{0} - \int_{-\infty}^{0} e^{v}p^2\cos(pv)\,dv + \left[e^{-v}p\sin(pv)\right]_{0}^{\infty} - \int_{0}^{\infty} e^{-v}p^2\cos(pv)\right. \\
&= \frac{2}{\pi} - p^2A(p) \\
\implies A(p) &= \frac{2}{\pi(1+p^2)} \\
B(p) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|v|}\sin(pv)\,dv \\
&= 0,
\end{aligned}$$

sidan integranden er odde.

$$\implies u(x,t) = \int_{0}^{\infty} \frac{2}{\pi(1+p^2)}\cos(px)e^{-c^2p^2t}\,dp$$

Alternativt via fouriertransformasjon:

$$\begin{aligned}
\hat{u}_t(w,t) &= -c^2w^2\hat{u}(w,t) \\
\implies \hat{u}(w,t) &= C(w)e^{-c^2w^2t} \\
\implies \hat{u}(w,t) &= \hat{f}(w)e^{-c^2w^2t},
\end{aligned}$$

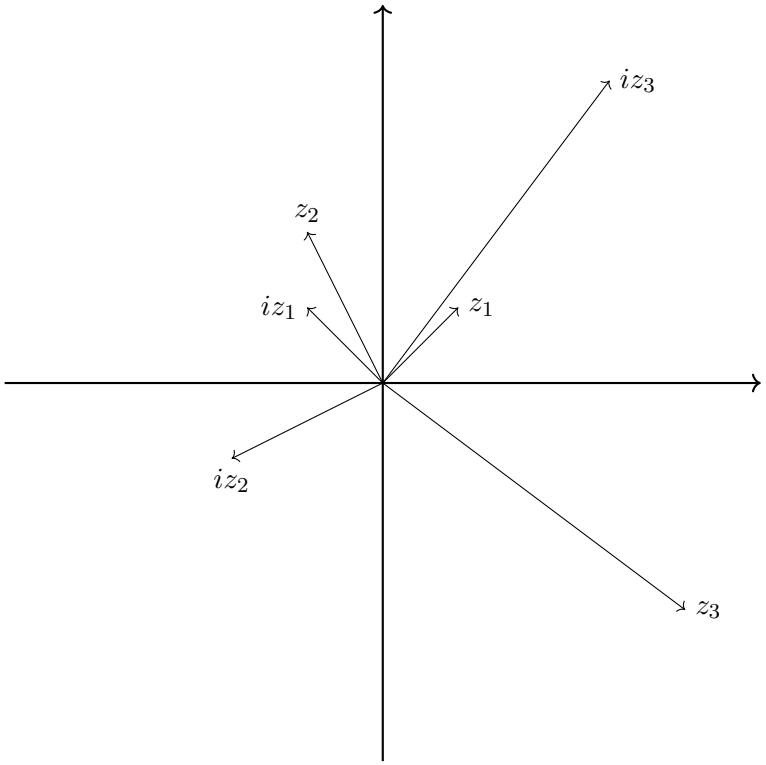
sidan $\hat{u}(w,0) = \hat{f}(w)$.

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(p)\frac{1}{2c^2t}\exp -\frac{(x-p)^2}{4c^2t}\,dp$$

13.1.2 Reknar ut

$$\begin{aligned}
iz_1 &= i(1+i) = -1+i \\
iz_2 &= i(-1+2i) = -2-i \\
iz_3 &= i(4-3i) = 3+4i
\end{aligned}$$

og plottar i det komplekse planet:



13.1.5

$$\begin{aligned}\overline{z} &= x - iy \\ -z &= -x - iy\end{aligned}$$

Desse er like viss og berre viss $x = 0$, altså viss og berre viss z er imaginær.

13.1.6 La $z_1 = x_1 + iy_1$ og $z_2 = x_2 + iy_2$ vere vilkårlege komplekse tal.

Ei løysing: Viss z_1 eller z_2 er imaginær og produktet er 0, følger det ganske direkte at ein av dei må vere 0. Anta dermed $x_1, x_2 \neq 0$. I dette tilfellet kan vi skalere z_1 og z_2 slik at $x_1 = x_2 = 1$. Denne skaleringa vil ikkje gjere produktet til 0 om det ikkje allereie var det frå før.

$$\begin{aligned}z_1 z_2 &= (1 + iy_1)(1 + iy_2) \\ &= 1 - y_1 y_2 + i(y_2 + y_1)\end{aligned}$$

For at dette skal vere 0, må vi ha $y_1 y_2 = 1$ og $y_1 + y_2 = 0$, som gir $-y_1^2 = 1$. Dette er umogleg, så vi må ha $z_1 = 0$ eller $z_2 = 0$.

Ei anna løysing:

$$\begin{aligned}z_1 z_2 &= (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) \\ &= x_1 x_2 - y_1 y_2 + i(x_1 y_2 + y_1 x_2)\end{aligned}$$

For at dette skal vere 0, må både $x_1x_2 - y_1y_2$ og $x_1y_2 + y_1x_2$ vere 0. Det gir oss følgande:

$$\begin{aligned} 0 &= (x_1x_2 - y_1y_2)^2 + (x_1y_2 + y_1x_2)^2 \\ &= x_1^2x_2^2 + y_1^2y_2^2 - 2x_1x_2y_1y_2 + x_1^2y_2^2 + y_1^2x_2^2 + 2x_1x_2y_1y_2 \\ &= x_1^2x_2^2 + y_1^2y_2^2 + x_1^2y_2^2 + y_1^2x_2^2. \end{aligned}$$

For at dette skal vere 0, må x_1x_2, y_1y_2, x_1y_2 og y_1x_2 vere 0, som kun skjer dersom $x_1 = y_1 = 0$ eller $x_2 = y_2 = 0$.

(Når vi skriv komplekse tal i polarkoordinatar, som i 13.2, blir denne oppgåva mykje enklare.)

13.1.9

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(z_1^2) &= \operatorname{Re}((-2+5i)^2) \\ &= (-2)^2 + 5^2i^2 \\ &= 4 - 25 \\ &= -21 \\ \operatorname{Re}(z_1)^2 &= (-2)^2 \\ &= 4 \end{aligned}$$

13.1.14

$$\begin{aligned} \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}} &= \frac{-2-5i}{3+i} \\ &= \frac{(-2-5i)(3-i)}{(3+i)(3-i)} \\ &= \frac{-6-5+i(2-15)}{9+1} \\ &= -\frac{11}{10} - i\frac{13}{10} \end{aligned}$$

Ved (9) på side 612 er $\overline{z_1/z_2}$ det same.

13.1.16

$$\begin{aligned}
\frac{1}{z} &= \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} \\
&= \frac{x - iy}{x^2 + y^2} \\
\implies \operatorname{Im}\left(\frac{1}{z}\right) &= -\frac{y}{x^2 + y^2} \\
\frac{1}{z^2} &= \left(\frac{1}{z}\right)^2 \\
&= \frac{(x - iy)^2}{(x^2 + y^2)^2} \\
\implies \operatorname{Im}\left(\frac{1}{z^2}\right) &= \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2}
\end{aligned}$$